

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

KARLA WEBER

SISTEMAS AUTOGRAVITANTES PARA GASES IDEAIS NA PRIMEIRA
APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

CURITIBA,
2018

KARLA WEBER

SISTEMAS AUTOGRAVITANTES PARA GASES IDEAIS NA PRIMEIRA
APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Setor de Ciências Exatas da Univer-
sidade Federal do Paraná, como requisito parcial
para a obtenção do grau de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

CURITIBA,
2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

- W373s Weber, Karla
Sistemas autogravitantes para gases ideais na primeira aproximação
pós-newtoniana / Karla Weber – Curitiba, 2018.
131p. : il. [algumas color.]
- Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2018.
Orientador: Gilberto Medeiros Kremer
Bibliografia: p. 111-120.
1. Galáxias. 2. Estrelas. 3. Equação de Boltzmann. 4. Equação de
Lane-Emden. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kremer, Gilberto
Medeiros. III. Título.

CDD: 523.112

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **KARLA WEBER** intitulada: "**Sistemas Autogravitantes para Gases Ideais na Primeira Aproximação Pós-Newtoniana**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

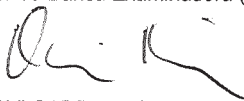
A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 02 de Agosto de 2018.



GILBERTO MEDEIROS KREMER

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



DAVI CABRAL RODRIGUES

Avaliador Externo (UFES)



SAULO CARNEIRO DE SOUZA SILVA

Avaliador Externo (UFBA)



THIAGO DOS SANTOS PEREIRA

Avaliador Externo (UEL)

*"Isto é um sonho, bem sei, mas quero
continuar a sonhar."*

(Friedrich Nietzsche)

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos aqueles que fizeram parte da realização deste sonho.

Em especial,

Aos meus guias espirituais por iluminarem e guiarem em meu caminho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer pela paciência, dedicação, exemplo e sabedoria ao longo deste quatro anos.

Ao meu esposo Matheus pelo incentivo incondicional e por compartilhar desta caminhada comigo com amor e dedicação.

Ao meu pai Menardino por sempre me incentivar nos estudos e a buscar o melhor de mim.

A minha mãe Clarís pelo amor e colo, principalmente nas horas difíceis.

A minha mana Karine pelas longas conversas e pelas palavras de tranquilidade e carinho.

A minha mana Kássia pelo carinho e ombro amigo.

A minha mãe-amiga Lucinamar pela força, apoio e incentivo em todos os momentos.

A minha estrela amiga Dra. Amanda Carolina Mathias Siementkowski por ser parte importante da minha vida e por tornar meus dias melhores com sua companhia e amizade.

A minha amiga Carine Rorato de Oliveira pelos conselhos e incentivo.

As amigas Suelen e Alessandra por me acolherem com tanto carinho e ternura na etapa final desta caminhada.

Aos meus professores, da graduação e pós-graduação que são parte da minha formação acadêmica. Em especial, aos professores Dr. Joecir Palandi e Dartanhan Baldez Figueiredo por incentivarem a chegar até aqui.

Aos colegas do grupo de Cosmologia da UFPR, Dr. Martín Gustavo Richarte e a Dra. Raíla André pelas contribuições relevantes para o desenvolvimento desta tese.

Aos colegas da Pós-Graduação, por compartilharem desta caminhada. Em especial aos amigos Dr^a Alessandra Barbosa, Giseli Moreira, Flávio Prebianca e Flávio Rusch.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física pela oportunidade de dar continuidade aos meus estudos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES) pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Nesta tese, propomos um modelo teórico para galáxias visando estudar o problema da discrepância das curvas de rotação teóricas e observacionais de galáxias. Este modelo foi elaborado a partir de conceitos advindos da teoria cinética relativista, do método de aproximação pós-newtoniano e dos princípios fundamentais da mecânica estatística. Com esta metodologia, obtivemos de uma maneira alternativa e original as equações hidrodinâmicas relativistas para as aproximações newtoniana e pós-newtoniana. Como aplicação, usamos o modelo para descrever as curvas de rotação de galáxias. As curvas de rotação foram usadas apenas para a descrição do disco estelar. O halo de matéria escura foi descrito a partir de um modelo da literatura. As curvas de rotação totais foram comparadas aos dados observacionais de galáxias espirais. Com isto, foi possível concluir que as correções pós-newtonianas contribuem de forma relevante as curvas de rotação e que o melhor ajuste aos dados observacionais depende das características das galáxias espirais tais como idade, classificação e morfologia. Pode-se concluir que o modelo descreve bem às curvas de rotação de galáxias mais jovens e de uma determinada morfologia. O segundo modelo apresentado é uma descrição de estruturas estelares. Para isto, foram obtidas a equação de Lane-Emden na aproximação pós-newtoniana, assim como das equações de balanço na aproximação pós-newtoniana. As estruturas estelares foram descritas para um modelo estelar em equilíbrio nas teorias newtoniana e pós-newtoniana juntamente com as soluções politrópicas para estrelas de nêutrons. Além disso, foi possível obter uma descrição adequada para o modelo das estruturas estelares partindo da equação de Boltzmann ao invés da equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) como é usualmente feito na literatura. Vale mencionar que os resultados obtidos aqui são relevantes apenas para estrelas densas como as estrelas de nêutrons. Por fim, constatou-se que para a descrição de ambos modelos propostos neste trabalho as contribuições pós-newtonianas associadas aos conceitos advindos da teoria cinética relativista desempenham um papel relevante.

Palavras - chaves: Galáxias Espirais; Estrelas; Equação de Boltzmann; Equação de Lane-Emden; Aproximação pós-newtoniana.

ABSTRACT

In this thesis, we propose a theoretical model for galaxies aiming to study the problem of the discrepancy of the theoretical and galaxies observational rotation curves of galaxies. This model was elaborated from concepts derived of the relativistic kinetic theory, the post-Newtonian approximation method and the fundamental principles of statistical mechanics. With this methodology, we obtained in an alternative and original way the relativistic hydrodynamic equations for the Newtonian and post-Newtonian approximations. Regarding the application, we use the model to describe the rotation curves of galaxies. Rotation curves were used only for the description of the star disk. The dark matter halo was described from a literature model. The total rotation curves were compared to the observational data of spiral galaxies. Thus, it was possible to conclude that post-Newtonian corrections contribute in a relevant way to the rotation curves and that the best fit to the observational data depends on the characteristics of the spiral galaxies such as age, classification and morphology. It can be concluded that the model describes well the rotation curves of younger galaxies and with a certain morphology. The second model presented is a description of stellar structures. To develop this model the Lane-Emden equation was obtained in the post-Newtonian approximation, as well as the balance equations in the post-Newtonian approximation. The stellar structures were described for a stellar model in equilibrium in the Newtonian and post-Newtonian theories along with the polytropic solutions for neutron stars. In addition, it was possible to obtain a suitable description for the model of stellar structures starting from the Boltzmann equation instead of the Tolmann-Oppenheimer-Volkoff equation (TOV), which is usually done in the literature. It is worth mentioning that the results obtained here are relevant only for dense stars such as neutron stars. Finally, it was verified that for the description of both models proposed in this work the post-Newtonian contributions associated with the concepts derived from relativistic kinetic theory play a relevant role.

Keywords: Galaxies; Stars; Boltzmann equation; Lane-Emden equation; 1PN Approximation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EQUAÇÃO DE BOLTZMANN RELATIVISTA	18
2.1	CONSIDERAÇÕES	18
2.2	OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN RELATIVISTA	18
2.2.1	Função Distribuição de Maxwell-Jüttner	21
2.2.2	Condições de Equilíbrio, Leis de Tolman e Klein	22
3	APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA	26
3.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO 1PN	26
3.2	MÉTODO DA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA	27
4	MODELO DE CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS EM 1PN	34
4.1	GALÁXIAS	36
4.1.1	Classificação da Morfologia das Galáxias	36
4.2	ANÁLISES NA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA	40
4.2.1	Função Distribuição de Maxwell-Jüttner na 1PN	40
4.2.2	Descrição Macroscópica	42
4.2.3	Algumas soluções estacionárias	45
4.3	ESTRUTURA DO MODELO PROPOSTO	55
4.3.1	Disco Estelar na aproximação pós-newtoniana	56
4.3.2	Halo de Matéria Escura	60
4.4	COMPARAÇÃO DAS CURVAS OBSERVACIONAIS E TEÓRICAS	61
4.4.1	NGC 3198	62
4.5	CURVAS DE ROTAÇÃO PARA OUTRAS GALÁXIAS ESPIRAIS	68
4.6	CONSIDERAÇÕES DO CAPÍTULO	76
5	MODELO ESTELARES EM 1PN	79
5.1	BREVE DESCRIÇÃO DE ESTRELAS	79
5.2	A EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN NA TEORIA NEWTONIANA	82
5.3	MODELOS ESTELARES POLITRÓPICOS	84
5.3.1	Equação Politrópica	84
5.3.2	Soluções da equação de Lane-Emden	87

5.4	A EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN PÓS-NEWTONIANA	88
5.4.1	Equação de Boltzmann na aproximação pós-newtoniana	88
5.4.2	Equações de Balanço na Aproximação pós-newtoniana	90
5.4.3	Obtenção da equação de Lane-Emden na aproximação pós-newtoniana	93
5.5	EQUAÇÕES DA ESTRUTURA ESTELAR	96
5.5.1	Modelo de estrutura estelar na teoria newtoniana	96
5.5.2	Modelos Estelares na aproximação pós-newtoniana	99
5.6	SOLUÇÕES POLITRÓPICAS	102
5.6.1	Soluções Numéricas para Estrelas de Nêutrons	103
6	CONCLUSÃO	109
	REFERÊNCIAS	112
A	INTEGRAIS GAUSSIANAS	121
B	EQUAÇÃO DE JEANS EM 1PN	122
C	EQUAÇÃO DE BOLTZMANN: COORDENADAS ESFÉRICAS	127
D	EQUAÇÃO DE BOLTZMANN: COORDENADAS CILÍNDRICAS	129
E	SOLUÇÕES POITRÓPICAS: ANÃS BRANCAS	130

1 INTRODUÇÃO

A Cosmologia é a área da ciência que se dedica ao estudo da estrutura, evolução e composição do Universo em sua totalidade e tem como objetivo a busca por modelos teóricos que possam descrever o Universo em todas as suas Eras e diferentes escalas. O Universo apresenta estruturas em todas as escalas: desde partículas sub-atômicas que formam núcleos, núcleos que formam átomos, átomos que formam planetas e estrelas. Estas, formam aglomerados de estrelas e de galáxias, que por sua vez formam aglomerados de galáxias, super-aglomerados e estruturas cada vez maiores. Além disso, é em Cosmologia que se estudam os problemas relacionados a expansão do Universo e a formação de estruturas astrofísicas como galáxias e estrelas por exemplo.

A Relatividade Geral foi a primeira teoria empregada na tentativa de uma descrição apropriada do Universo e é uma teoria bem sucedida na cosmologia, que sobrevive a vários testes observacionais. Ainda assim, existem várias evidências de que esta teoria pode estar incompleta. Até o início do século passado, os resultados previstos pela teoria da Relatividade Geral estavam em concordância com os dados observacionais coletados. Desde então, novos dados observacionais foram coletados e com isto, surgiram alguns problemas entre a descrição apresentada pelas teorias gravitacionais e as observações coletadas.

O primeiro problema apresentado é relacionado a expansão acelerada do Universo. Este problema surgiu a partir de observações da magnitude aparente e do desvio para vermelho de supernovas que começaram a indicar que o Universo está em expansão acelerada. Para explicar esta aceleração, surgiu a hipótese de existência de um tipo de energia desconhecida, a qual é chamada de energia escura [1]. Pelas observações atuais das anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas (realizadas pelo satélite WMAP e Planck [2]) temos que aproximadamente 72% da densidade atual do Universo é composta pela energia escura, 23% por matéria escura e apenas 4% pela matéria conhecida, composta por bárions e léptons [3].

O segundo problema está relacionado com a discrepância entre a quantidade matéria bariônica predita teoricamente e a matéria observada. As densidades de matéria no Universo são evidências obtidas a partir da contagem de todos os objetos luminosos (estrelas, galáxias, aglomerados etc) conhecidos. Destas observações, foi possível notar uma diferença entre os valores das densidades de matéria prevista teoricamente e observada. Uma possível explicação para esta diferença seria devido à presença da matéria escura, um tipo de matéria desconhecida e não detectada até o presente momento. A princípio, acredita-se que a matéria escura só interage com os demais objetos gravitacionalmente.

E por fim, temos o problema relacionado com a dinâmica das galáxias. O problema da discrepância considerável entre as curvas de rotação de galáxias previstas pela teoria newtoniana e as curvas obtidas observacionalmente [4]. A velocidade com que as galáxias

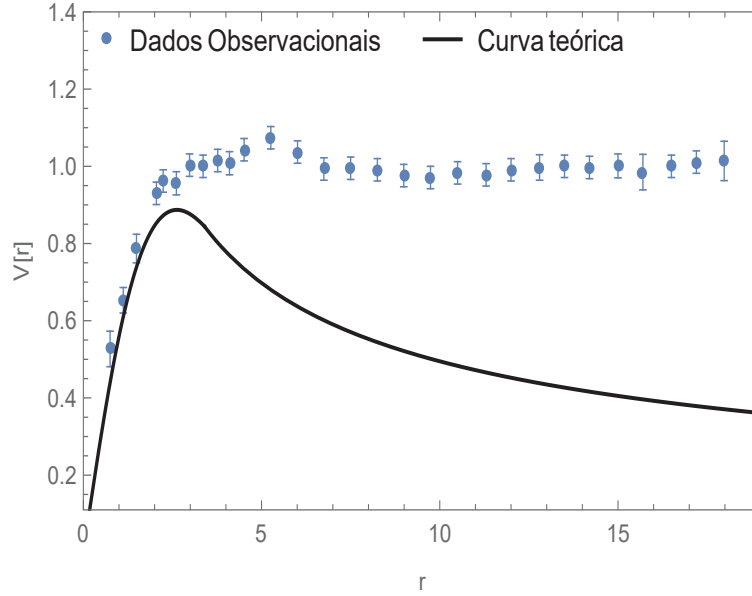
se movimentam exige que haja mais matéria do que é observada para mantê-las em seus aglomerados. Isto também leva a crer na existência de uma matéria desconhecida responsável por esta dinâmica, a matéria escura. Vale mencionar, que as curvas de rotação tem bastante relevância para a descrição física destas estruturas. Portanto, considerando os problemas mencionados, para que a teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein possa descrever apropriadamente os fenômenos observacionais, como a expansão acelerada do Universo e as curvas de rotação de galáxias, por exemplo, é necessário que sejam incluídos constituintes desconhecidos como matéria escura e energia escura.

Nesta tese, estudaremos algumas das estruturas que constituem o Universo, tais como estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias. As estruturas mencionadas são exemplos de estruturas consideradas como sistemas autogravitantes que será o foco do nosso trabalho. Além disso, tais estruturas são constituídas por componentes individuais que se mantêm unidos devido a interação gravitacional entre seus constituintes formando assim o objeto astrofísico como um todo. As galáxias são consideradas um exemplo pois são constituídas por gás interestelar, estrelas e matéria escura e é uma estrutura que possui bilhões de estrelas. É interessante mencionar, que as galáxias por exemplo, podem ser organizadas como constituintes de estruturas astrofísicas maiores chamadas de aglomerados ou superaglomerados de galáxias [5]. Estas estruturas, por sua vez, são estruturas constituídas de bilhões de galáxias.

Como já mencionamos anteriormente, a descrição de fenômenos astrofísicos gravitacionais, de maneira geral é feita pela teoria da Relatividade Geral. No entanto, a descrição do movimento de estrelas e galáxias ainda atualmente, é feito a partir da teoria newtoniana isto porque para a descrição do movimento de partículas em regimes de baixas velocidades e campos gravitacionais fracos a teoria newtoniana apresenta resultados suficientes. Portanto é usual, utilizarmos a teoria newtoniana ao invés da teoria da Relatividade Geral para a descrição da física do Sistema Solar. Além disso, para estes limites a teoria da Relatividade Geral se reduz a teoria newtoniana. Um exemplo descrito pela teoria newtoniana, é o caso do movimento de estrelas no interior das galáxias, as quais tem velocidades pequenas comparadas à velocidade da luz e o campo gravitacional é muito fraco [6]. A teoria da Relatividade Geral é uma teoria não-linear e este caso deve ser analisado em detalhes.

Nesta tese um dos problemas que vamos estudar é o da discrepância entre as curvas de rotação de galáxias, mencionado anteriormente. Para o problema das curvas de rotação ficar mais claro, na Fig. 1.2 é possível ter uma idéia da discrepância entre as curvas de rotação de uma galáxia espiral previstas teórica e observacionalmente mencionadas anteriormente.

Figura 1.1: Comparação das curvas de rotação de galáxias teórica e observacional.



Como uma proposta para estudar este problema, construímos um modelo astrofísico usando conceitos advindos da teoria cinética relativista [7] e do método de aproximação pós-newtoniano [6]. Tal método, consiste em realizar perturbações em torno do espaço-tempo de Minkowski. A idéia é considerar perturbações em torno do tensor métrico juntamente com as suas correspondentes perturbações para o tensor energia-momento. As perturbações consideradas são como pequenas flutuações que podem ser expandidas em potências de v/c , onde v é a velocidade típica no sistema associado com a massa e c é a velocidade da luz [6]. O modelo proposto aqui é um modelo puramente teórico elaborado a partir dos princípios fundamentais da mecânica estatística. A partir dos primeiros princípios foi possível obter de uma maneira alternativa à Relatividade Geral as mesmas equações para o tensor energia-momento, densidade e equações hidrodinâmicas obtidas em [6, 8].

Na literatura, muitos autores dedicam seus esforços para aplicar a teoria cinética ao método pós-newtoniano na descrição de modelos astrofísicos. Dentre eles, estão os trabalhos [9–11] nos quais são apresentados modelos que consideram as correções relativistas na teoria newtoniana. Com o objetivo de explicar as curvas de rotação de galáxias, as quais se tornam lineares quanto maior é o raio, alguns autores sugerem a inclusão das correções pós-newtonianas nos modelos astrofísicos para estudar este problema. Ainda, sugerem que tais correções podem realmente contribuir para a redução da quantidade de matéria escura necessária para explicar as curvas de rotação [12]. Vale a pena notar que, tais correções por si só não superam todo o problema das curvas de rotação, porém podem reduzir a quantidade de matéria escura necessária comparada à descrita pelo modelo newtoniano.

Já, no contexto da teoria cinética relativista, a primeira tentativa para obter uma equação cinética na aproximação pós-newtoniana foi feita em [13], no qual foram en-

contradas algumas soluções relevantes, tais como a versão na primeira aproximação da equação de Liouville para um gás de partículas idênticas sem colisão. A obtenção da correlação entre as equações para as descrições macroscópicas e microscópicas foi obtida mais recentemente em [14]. Partindo desta idéia, a equação de Boltzmann sem colisões foi obtida para gases autogravitantes com correções pós-newtoniana de maneira consistente com a equação microscópica [14]. Além disso, o caso das soluções para politrópicos pós-newtonianos foi estudado numericamente concentrando-se no papel desempenhado pelas correções relativísticas das curvas de rotação. Ainda, foram construídas soluções em primeira aproximação para estrelas politrópicas, que são estrelas descritas a partir de uma função de distribuição característica¹. As equações de campo foram solucionadas numericamente obtendo-se os perfis das curvas para a energia potencial gravitacional, densidade e velocidade circular. A teoria cinética, também foi explorada para um sistema de gases autogravitantes com simetria axial nas estruturas do formalismo pós-newtoniano em [15]. Este modelo foi aplicado para o caso de discos finos, tendo como foco os modelos de galáxia com simetria axial. Em particular, foram obtidas as curvas de rotação e os perfis de massa para a versão pós-newtoniana dos discos Morgan-Morgan² e a obtenção do teorema do virial na primeira aproximação pós-newtoniana (1PN) [15]. Ainda nesta linha de pesquisa, em [17] foram estudados sistemas autogravitantes com equação de estado politrópica na aproximação pós-newtoniana da Relatividade Geral. A motivação física considerada foi que esta equação pode ser usada para descrever vários sistemas astrofísicos tais como anãs brancas, estrelas de nêutrons, halos de galáxias e aglomerados globulares, dentre outros. Vale notar que o modelo desta tese é um modelo puramente teórico, como já comentado anteriormente foi obtido a partir dos fundamentos da Mecânica Estatística e não é um modelo fenomenológico o modelo proposto em [14].

Esta tese está dividida em duas partes. A primeira delas é ao considerarmos o contexto descrito para a teoria cinética e o método pós-newtoniano apresenta um modelo puramente teórico e original na primeira aproximação pós-newtoniana advindo de conceitos fundamentais da Mecânica Estatística e da teoria cinética. Neste modelo, é considerado um sistema de partículas autogravitantes descrito pela função distribuição de Maxwell-Jüttner³, a qual satisfaz a equação de Boltzmann relativista sem colisões [18]⁴. Para esta descrição, são consideradas as seguintes hipóteses apresentadas sucintamente aqui, as partículas do sistema são partículas pontuais e as colisões entre elas são eventos raros. Uma vez que a função distribuição é obtida, é possível determinar as principais características do sistema considerado tais como energia potencial, densidade, pressão. Exemplos de aplicação física para esta equação de Boltzmann sem colisões são apresentados em [19] para um gás descrito pela função distribuição de Boltzmann em equilíbrio, no qual o centro de gravidade segue uma geodésica circular no campo de Schwarzschild. E, para halos de matéria escura, nos quais a matéria escura interage somente gravitacionalmente e raramente apresenta colisões, portanto pode-se assim considerar a matéria escura como um sistema não-colisional e usar a equação de Vlasov para descrever sua evolução [4]. Para

¹A função característica que descreve as estrelas politrópicas são funções da energia do tipo $f \approx E^n$ [14].

²Discos de Morgan-Morgan são um tipo de solução proposta para as equações de Einstein [16].

³A função distribuição é uma função das posições e momentos das partículas em um espaço de fase de seis dimensões.

⁴Tal equação, é também conhecida como equação de Vlasov [18].

obter o sistema de equações não-lineares para os potenciais gravitacionais formado pelo tensor energia-momento e as equações de Poisson, o tensor energia-momento é calculado a partir da função distribuição. Este sistema é resolvido numericamente, e finalmente, são obtidos os perfis das curvas em primeira aproximação pós-newtoniana (1PN) para a densidade de massa, velocidade circular, energia potencial gravitacional e pressão. Estas curvas permitem comparar o comportamento newtoniano e pós-newtoniano destas grandezas físicas. Vale a pena observar, que para certos valores do raio, o qual chamamos r_c , os campos gravitacionais se tornam complexos e portanto, deve-se corresponder a última solução com uma outra solução física. Ainda, é apresentado um procedimento para obter potenciais gravitacionais físicos unindo outra solução em r_c . Em adição, nota-se que tal procedimento adotado leva a perfis da velocidade circular que se tornam planos para grandes valores do raio. O procedimento de correlacionar duas soluções em um raio r_c permite que sejam obtidas curvas de rotação circular na primeira aproximação pós-newtoniana. Até aqui, apresentamos uma breve descrição da obtenção do modelo teórico obtido nesta tese [20].

Uma vez que o modelo teórico foi bem estabelecido, propomos um estudo de aplicação para o problema das curvas de rotação de galáxias espirais como o intuito de apresentar uma solução para o problema, já mencionado. Portanto, as curvas de velocidade circular obtidas teoricamente são usadas para descrevermos o disco estelar de galáxias espirais na aproximação pós-newtoniana. Estas curvas dependem de um parâmetro ζ o qual é a razão entre a energia da partícula em repouso e a energia térmica. Como as galáxias espirais são estruturas constituídas de componentes, tais como: o halo de matéria escura, o bojo e o disco estelar sendo que a descrição do disco estelar já foi mencionada. Logo, o halo de matéria escura é descrito fazendo-se o uso do perfil de densidade de Burkert [21]. Com estas duas descrições são obtidas as curvas de rotação para o modelo de galáxias espirais desta tese. E, posteriormente, estas curvas de rotação são comparadas aos dados observacionais. Os resultados obtidos para esta comparação são que as curvas pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes comparadas à newtoniana. Esta comparação foi realizada para um conjunto de 9 galáxias espirais, e os resultados obtidos para cada uma delas depende de características como a idade, a morfologia e classificação da galáxia.

A segunda parte apresenta um modelo para estruturas estelares, tais como estrelas de Nêutrons, no qual a equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana é obtida e, a partir das soluções desta equação, são obtidas e analisadas as grandezas físicas associadas aos modelos de estrutura estelar, tais como: densidade, pressão e temperatura. Este segundo modelo proposto é um modelo para estrutura estelar na aproximação pós-newtoniana, no qual são obtidas as quantidades físicas associadas a estas estruturas a partir da solução da equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana (1PN).

Neste ponto, é importante mencionar que na literatura há vários trabalhos sobre estruturas estelares no contexto da aproximação pós-newtoniana, principalmente para o caso de Anãs Brancas e estrelas de nêutrons. Em [22] é proposto um modelo, no qual a motivação física relevante é demonstrar que os atuais limites observacionais das teorias de gravitação permitem a existência de estrelas de nêutrons com massas muito maiores que as calculadas nas estruturas da teoria da Relatividade Geral, justificando assim o uso do

método pós-newtoniano. Os cálculos desenvolvidos no método pós-newtoniano engloba a maioria das teorias gravitacionais atuais. Nos modelos apresentados em [22–24] são obtidas a massa de estrelas de nêutrons com correções pós-newtonianas, a partir das equações de equilíbrio hidrodinâmico ou da equação de Tolmann-Oppenheimer e Volkoff (TOV) ⁵. Modelos estelares para estrelas massivas utilizando as equações de Tolmann-Oppenheimer e Volkoff juntamente com uma equação politrópica nas estruturas da Relatividade Geral também são propostos em [25, 26]. Em [27], foi obtido que as correções pós-newtonianas desempenham um papel importante em estruturas como estrelas de nêutrons, ao empregar o método no estudo da instabilidade destas estruturas. Adicionalmente, em [28] foi obtido que tais correções alteram não somente a interação gravitacional entre duas estrelas de nêutrons, mas também a configuração de cada uma das estrelas de nêutrons de um sistema binário. Ainda neste contexto, em [29] foi determinado que os efeitos das correções pós-newtonianas tendem a desempenhar um papel importante na instabilidade da radiação gravitacional. Por fim, modelos estelares em primeira aproximação pós-newtoniana (1PN) para simetria axial são propostos em [30, 31].

Portanto, o interesse em desenvolver este modelo, no presente contexto é mostrar que as grandezas como a pressão, a temperatura e a densidade podem ser consistentemente alcançadas pelas correções pós-newtonianas descrevendo estrelas do tipo estrelas de nêutrons; e como se dão as mudanças esperadas dessas grandezas. Além disso, estas quantidades físicas não são exploradas nos modelos descritos na literatura atual. Ao realizar a comparação destes resultados com os obtidos pela teoria newtoniana, é constatado que a melhor descrição de estrelas massivas foi obtida para a primeira aproximação pós-newtoniana. No caso das estrelas de baixa massa, as correções pós-newtonianas não se mostraram relevantes, uma vez que as grandezas analisadas na aproximação pós-newtoniana coincidem com as obtidas pelo modelo newtoniano. Vale mencionar que devido as condições extremas existentes em estruturas como estrelas de nêutrons, alguns efeitos de campos ou curvaturas, podem não ser observados em testes convencionais realizados para o Sistema Solar, e no caso de estrelas de nêutrons podem surgir. Ou seja, pode haver alguma informação relevante para a gravitação, escondida em locais onde as grandezas físicas como a pressão e a densidade são extremas. Sendo assim, estes objetos se tornam ideais para testar teorias gravitacionais. Os resultados obtidos para as grandezas físicas associadas a estrela de nêutrons na aproximação pós-newtoniana apresentam correções relevantes aos obtidos pela teoria newtoniana. Mais uma vez, evidenciando que as contribuições pós-newtonianas são relevantes no estudo de modelos astrofísicos destas estruturas.

Organização desta tese

O Capítulo 1 apresenta uma introdução do contexto no qual a tese foi desenvolvida. Os Capítulos 2 e 3 são referentes a revisão da literatura. No capítulo 2, é apresentada a obtenção da equação de Boltzmann relativista na presença de campos gravitacionais [18], e é feita uma breve apresentação sobre as condições de equilíbrio impostas pela equação de Boltzmann à função distribuição. Na sequência, é demonstrada a obtenção das leis de

⁵A equação de TOV é uma equação de equilíbrio hidrostático usada para descrever uma estrela de nêutrons, considerando uma equação de estado politrópica.

Tolman [32] e Klein [33]. No Capítulo 3, é apresentado o método matemático desenvolvido para a obtenção das correções de ordem superiores às obtidas na teoria newtoniana dentro das estruturas da Relatividade Geral, chamado método da aproximação pós-newtoniana. Ainda, são feitas as considerações relevantes sobre o método proposto e, apresentadas as equações obtidas pelo método. Os resultados obtidos para o modelo de galáxias espirais e para a estrutura estelar são estabelecidos nos Capítulos 4 e 5, respectivamente. No capítulo 4, primeiramente é feita uma descrição das galáxias. Em seguida, serão feitas as análises obtidas na primeira aproximação pós-newtoniana (1PN). Partindo, da função distribuição de Maxwell-Jüttner na primeira aproximação pós-newtoniana (1PN) juntamente com a obtenção do tensor-energia momento e o quadri-fluxo de partículas. Na sequência, são obtidas algumas soluções estáticas para o sistema considerado. Posteriormente, são feitas a análise e comparação dos seguintes campos: densidade, energia potencial gravitacional, pressão e velocidade circular para as aproximações newtoniana e pós-newtoniana. Ainda, é construído um modelo para galáxias espirais no qual descreve-se: o disco estelar e o halo de matéria escura. O disco estelar é descrito a partir dos perfis das curvas de rotação circular correlacionando duas diferentes soluções estáticas para um determinado valor do raio. O halo de matéria escura é descrito para o perfil de densidade de Burkert [21]. Então, é feita a comparação do resultados obtidos para as curvas de rotação do modelo com os dados observacionais de galáxias espirais. Por fim, são feitas as considerações do modelo. No capítulo 5, primeiramente é feita uma descrição das estruturas estelares. Em seguida, são apresentadas a equação de Lane-Emden e os modelos politrópicos para a teoria newtoniana [34]. Na sequência, são apresentados os resultados obtidos para a obtenção da equação de Lane-Emden em primeira aproximação pós-newtoniana (1PN), assim como das equações de balanço na primeira aproximação pós-newtoniana (1PN). Além disso, são descritos os modelos estelares nas teorias newtoniana e pós-newtoniana juntamente com as soluções politrópicas para estrelas de nêutrons. Por fim, são apresentadas as conclusões e considerações do modelo descrito. No Capítulo 6, são feitas algumas observações finais referentes aos resultados obtidos, e são mencionadas as expectativas futuras. A assinatura métrica adotada nesta tese é $(-, +, +, +)$. Caso forem necessárias, outras convenções serão explicadas no seu devido tempo.

2 EQUAÇÃO DE BOLTZMANN RELATIVISTA

2.1 CONSIDERAÇÕES

Nesta tese, um dos sistemas astrofísicos que descrevemos são as galáxias. Para construção de um modelo para estes sistemas, utilizamos os conceitos advindos da teoria cinética e da equação de Boltzmann relativista. Para isto, foi necessário considerarmos a hipótese de que as estrelas e o gás que são constituintes das galáxias são consideradas partículas pontuais ¹ que interagem entre si. Para o sistema considerado, a interação fundamental predominante entre seus constituintes é a interação gravitacional. Com isso, é possível pensarmos nas galáxias como um conjunto de partículas que formam um ensemble de partículas. Desta forma, a descrição do movimento destas partículas pode ser feito a partir de uma função distribuição que satisfaça uma equação cinética [18]. Neste caso, a equação cinética a ser satisfeita pela função distribuição é a equação de Boltzmann. A função distribuição que vamos estudar é uma função das posições e momentos das partículas em um espaço de fase de seis dimensões. Uma vez que é possível obter a função distribuição, se torna possível determinar as principais características do sistema considerado. Por exemplo, podemos determinar a velocidade quadrática média e outros momentos da função distribuição [18]. O objetivo deste capítulo é apresentarmos os conceitos básicos da teoria cinética e a obtenção da equação relativística de Boltzmann que rege a evolução temporal da função de distribuição associada ao sistema de estudo considerado.

2.2 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE BOLTZMANN RELATIVISTA

Aqui, apresentaremos a obtenção da equação de Boltzmann relativista na presença de campos gravitacionais [18]. A equação de Boltzmann é uma equação íntegro-diferencial fundamental na teoria das colisões, na qual se baseia a teoria cinética de gases relativistas. A equação de Boltzmann nos permite descrever a evolução temporal da função distribuição associada a uma partícula de um sistema estacionário. Além disso, o conhecimento da função distribuição torna possível determinar as propriedades macroscópicas de um gás ou de uma partícula em questão.

A equação de Boltzmann para um gás relativista não-degenerado² no espaço de Min-

¹A hipótese é válida pois estes constituintes do sistema são muito menores comparados ao sistema como um todo.

²Gás para qual não são levados em conta os efeitos quânticos.

kowski para uma partícula de massa m é dada por

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_{*0}}. \quad (2.1)$$

onde $p^\mu = (p_0, \vec{p}, \vec{x})$ é a quantidade de movimento da partícula que pode ser escrito em termos das componentes p_0 e \mathbf{p} , x^μ a posição da partícula no espaço hexa-dimensional de coordenadas da posição e quantidade de movimento denominado espaço de fase μ , σ é a seção de choque diferencial invariante, Ω é o elemento de ângulo sólido caracterizado pela colisão entre as partículas do gás e F é o fluxo invariante através de um cilindro (geometria considerada para uma colisão binária) [7].

Para determinarmos o que representa as nomenclaturas das funções de distribuição f'_* , f' , f_* e f na equação de Boltzmann considere a colisão elástica entre duas partículas idênticas com massa de repouso m que é caracterizada antes da colisão pelas quantidades de movimento p e p_* (não correlacionados) e depois da colisão as quantidades de movimento são p' e p'_* . Com isso, as funções distribuições são definidas por

$$f'_* \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}'_*, t), \quad f' \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}', t), \quad f_* \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}_*, t) \quad \text{e} \quad f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.2)$$

são as funções que aparecem no lado direito da equação de Boltzmann. Considerando que o elemento de integração invariante é igual antes e depois da colisão $\frac{d^3 p_*}{p_{*0}} = \frac{d^3 p'_*}{p'_{*0}}$, é possível fazermos esta consideração uma vez que assumimos a hipótese de que o fluxo de partículas através de uma cilindro é a constante. Aqui, é importante mencionarmos que a equação de Boltzmann é válida somente para colisões binárias, ou seja, apenas são consideradas as colisões que ocorrem entre os pares de partículas. As colisões são consideradas para que se possa demonstrar o lado direito da equação de Boltzmann.

A obtenção da equação de Boltzmann na presença de campos gravitacionais sem colisão, é realizada a partir da análise do lado esquerdo da equação (2.1). Para esta análise, primeiramente escrevemos a função distribuição $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ como $f(x^\mu(\tau^*), p^i(\tau^*))$, em termos de um parâmetro afim ao longo da linha mundo. O parâmetro afim é dado por $\tau^* = \tau/m$, em que m é a massa da partícula em repouso e τ denota a propriedade tempo próprio. Sendo assim, a variação da função distribuição a respeito do parâmetro τ^* é,

$$\frac{df(x^\mu(\tau^*), p^i(\tau^*))}{d\tau^*} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau^*} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{dp^i}{d\tau^*}, \quad (2.3)$$

onde $\mu = (0, 1, 2, 3)$ e $i = (1, 2, 3)$. Além disso, escrevemos a equação de movimento de uma partícula [6] é dada por

$$\frac{dp^i}{d\tau^*} = -\Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu, \quad (2.4)$$

onde

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau^*}. \quad (2.5)$$

Na expressão (2.4), $\Gamma_{\mu\nu}^i$ é a conexão afim que pode ser escrita em termos do tensor métrico, como será visto no capítulo 3.

A expressão (2.3) juntamente com a equação de movimento (2.4), nos permite escrever seguinte equação

$$\frac{df(x^\mu(\tau^*), p^i(\tau^*))}{d\tau^*} = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i}, \quad (2.6)$$

consequentemente, o lado esquerdo da equação de Boltzmann é substituído por

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \longrightarrow p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i}. \quad (2.7)$$

E, o elemento invariante d^3p_*/p_{*0} do lado direito da equação de Boltzmann, é substituído por $\sqrt{-g}d^3p_*/p_{*0}$.

Finalmente, temos que a equação de Boltzmann na presença de campos gravitacionais é

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i} = C(f, f). \quad (2.8)$$

Na equação (2.8), $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é a função distribuição de uma partícula no espaço de fase gerado pelas coordenadas \mathbf{x} e as três coordenadas do momento \mathbf{p} , $\Gamma_{\mu\nu}^i$ são os símbolos de Christoffel e $C(f, f)$ é o operador colisão da equação de Boltzmann dado pelo lado direito da equação (2.1), e igual a zero para o caso sem colisão. O operador colisão é o termo da equação que leva em conta o produto entre duas funções distribuições na colisão entre os pares de partículas. Ainda, a respeito da equação (2.8) vale notar que a condição $p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$ é levada em conta, onde m é a massa da partícula no referencial em repouso [7].

É relevante mencionarmos que a equação de Boltzmann apresenta outras condições a serem satisfeitas no que se diz respeito a teoria das colisões. Além da mencionada anteriormente sobre as colisões binárias, há as seguintes hipóteses feitas para os sistemas descritos pela equação de Boltzmann:

I. O efeito das forças externas que agem sobre as partículas do gás durante a colisão é pequeno em comparação às forças de interação entre as partículas (forças de interação mútua);

II. A variação da função distribuição é pequena ao longo do tempo de duração de uma colisão;

III. As velocidades de duas partículas não estão correlacionadas, para quaisquer posição e tempo considerados.

2.2.1 Função Distribuição de Maxwell-Jüttner

Considerando um sistema em equilíbrio, para o qual o termo de colisão $C(f, f)$ é nulo, isto implica que a função distribuição que descreve o sistema é a função distribuição de Maxwell-Jüttner [7]. Portanto,

$$f = \frac{n}{4\pi m^2 c T K_2(\zeta)} \exp\left(\frac{p^\mu U_\mu}{kT}\right), \quad (2.9)$$

na expressão (2.9) acima, k é a constante de Boltzmann e n , T , U^μ são a densidade do número de partículas, a temperatura, a quadri-velocidade do gás e p^μ o quadri-momento, respectivamente. Além disso, $\zeta = mc^2/kT$ representa a razão entre a energia de repouso das partículas do gás e a energia térmica do gás, c é a velocidade da luz e $K_2(\zeta)$ a função de Bessel modificada de segunda ordem.

Uma outra maneira que podemos escrever a função distribuição de Maxwell-Jüttner (2.9), é a partir da função de Gibbs por partícula. Desta forma, obtemos a função distribuição em termos do potencial químico μ . Para obter tal função distribuição, parte-se da função de Gibbs por partícula, dada por

$$g = e - Ts + \frac{p}{n}, \quad (2.10)$$

na equação (2.10), e é a energia por partícula, s é a entropia por partícula e p , T e n são a pressão, temperatura e densidade de partículas do gás, respectivamente.

A energia por partícula, a pressão e a entropia são dadas pelas seguintes equações:

$$e = mc^2 \left[\frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} \right], \quad p = nkT, \quad (2.11)$$

e

$$s = k \left[\ln \left(\frac{4\pi T m^2 c K_2(\zeta)}{en} + \zeta \frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} \right) \right], \quad (2.12)$$

nas equações (2.11) e (2.12) $K_2(\zeta)$ a função de Bessel modificada de segunda ordem e $K_3(\zeta)$ a função de Bessel modificada de terceira ordem. Além das equações para e , s ,

p , também é utilizada a expressão da função de Gibbs por partícula g que pode ser identificada com o potencial químico, conforme

$$\mu \equiv g = kT \left[\ln \left(\frac{en}{4\pi T m^2 c K_2(\zeta)} \right) \right], \quad (2.13)$$

onde e é dado pela primeira expressão da equação (2.11). Ao substituir as equações (2.11 - 2.13) em (2.9), após algumas manipulações matemáticas, obtemos

$$f = \exp \left(\frac{\mu}{kT} - 1 + \frac{p^\mu U_\mu}{kT} \right), \quad (2.14)$$

que é a função distribuição no equilíbrio em termos do potencial químico μ .

É interessante notarmos que a única função distribuição que satisfaz a equação de Boltzmann no contexto da Relatividade Geral é a de Maxwell-Jüttner, tal implicação é demonstrada em [18].

2.2.2 Condições de Equilíbrio, Leis de Tolman e Klein

Uma vez que a equação de Boltzmann é usada para descrevermos um sistema associado a uma função distribuição existem algumas condições a serem satisfeitas por esta função. E, como consequência destas condições tem-se duas leis, chamadas lei de Tolman e lei de Klein. Estas leis relacionam o tensor métrico com a temperatura e com o potencial químico do sistema, respectivamente.

Nesta seção, primeiramente será tratado sobre às condições de equilíbrio impostas pela equação de Boltzmann à função distribuição. Na sequência, serão demonstradas a obtenção das leis de Tolman [32] e Klein [33], que são consequências das condições de equilíbrio para um gás relativista [19].

Condições de Equilíbrio

Anteriormente foi visto que, a função distribuição de Maxwell-Jüttner (2.14) no equilíbrio, anula do lado direito da equação de Boltzmann (2.8), portanto o termo devido às colisões se torna igual a zero. Devido a isso, o lado esquerdo da equação de Boltzmann (2.8) impõe algumas restrições à função distribuição. Para que as condições de equilíbrio sejam determinadas, primeiramente substituímos a equação (2.14) na (2.8),

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\exp \left(\frac{\mu}{kT} - 1 + \frac{p^\mu U_\mu}{kT} \right) \right] - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial}{\partial p^i} \left[\exp \left(\frac{\mu}{kT} - 1 + \frac{p^\mu U_\mu}{kT} \right) \right] = 0. \quad (2.15)$$

Na sequência, desenvolve-se as derivadas, obtendo a seguinte equação

$$p^\nu \partial_\nu \left[\frac{\mu}{kT} \right] - \frac{1}{2} p^\mu p^\nu \left(\left[\frac{U_\mu}{kT} \right]_{;\nu} + \left[\frac{U_\nu}{kT} \right]_{;\mu} \right) = 0, \quad (2.16)$$

onde $;\mu$ é a derivada covariante com respeito a x^μ ou seja $;\mu \equiv \nabla_\mu$ e $;\nu$ é a derivada covariante com respeito a x^ν ou seja, $;\nu \equiv \nabla_\nu$.

A equação (2.16) é uma equação polinomial que deve ser válida para todos os valores de p^i . Portanto, esta equação é satisfeita, somente se os coeficientes dos polinômios forem nulos. Ou seja,

$$\partial_\nu \left[\frac{\mu}{kT} \right] = 0, \quad \left[\frac{U_\mu}{kT} \right]_{;\nu} + \left[\frac{U_\nu}{kT} \right]_{;\mu} = 0. \quad (2.17)$$

A expressão da direita da equação (2.17) é chamada de equação de Killing e $\frac{U_\nu}{kT}$ é o vetor de Killing.

Perfazendo as derivadas parciais da equação de Killing, é possível reescrevê-la da seguinte maneira

$$U_{\mu;\nu} + U_{\nu;\mu} - \frac{1}{T} (T_{,\nu} U_\mu + T_{,\mu} U_\nu) = 0. \quad (2.18)$$

onde $T_{,\nu} = \partial_\nu T$ e $T_{,\mu} = \partial_\mu T$.

Neste estágio, realizando as projeções proporcionais e perpendiculares adequadas à U^σ respectivamente, chega-se as seguintes relações

$$\dot{T} = 0 \quad e \quad \dot{U}_\mu + \frac{c^2}{T} \nabla_\mu T = 0. \quad (2.19)$$

As expressões obtidas em (2.19), são as expressões para as condições de equilíbrio.

Aqui, usamos as seguintes definições,

$$\dot{T} \equiv U^\mu \partial_\mu T, \quad \dot{U}_\mu \equiv U^\nu U_{\mu;\nu}, \quad \nabla_\mu T \equiv h_\mu^\nu T_{,\nu}, \quad (2.20)$$

em que $h_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} + c^{-2} U_\mu U_\nu$ e temos que $;\nu$ é a derivada covariante em relação a U .

As condições de equilíbrio obtidas em (2.19) nos permitem inferir a seguinte interpretação física para um gás relativista prescrito pela equação de Boltzmann no equilíbrio: que a existência de um gradiente de temperatura deve ser contrabalançado por uma aceleração.

Obtenção das Leis de Tolman e Klein

As condições de equilíbrio foram obtidas. O próximo passo é obtermos as leis de Tolman e de Klein. A lei de Tolman e a lei de Klein relacionam a raiz do tensor métrico $\sqrt{-g_{00}}$ associado ao sistema com a sua temperatura e o potencial químico, respectivamente.

Para a obtenção da lei de Tolman, considera-se um fluido num referencial em repouso, tal que

$$U^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}, 0 \right). \quad (2.21)$$

Levando em conta a existência do vetor de Killing em relação a uma métrica estacionária, o termo da aceleração torna-se

$$\dot{U}^\mu = -\frac{c^2 \Gamma_{00}^\mu}{g_{00}} = \frac{c^2}{2g_{00}} g^{\mu\nu} g_{00,\nu}, \quad (2.22)$$

onde a segunda igualdade vem da definição de Γ_{00}^μ . Agora, usando a expressão (2.21) e a equação da direita de (2.19), temos

$$\frac{c^2}{2} g^{\mu\nu} [\ln(-g_{00})]_{,\nu} + c^2 g^{\mu\nu} (\ln T)_{,\nu} = 0. \quad (2.23)$$

Ou ainda,

$$c^2 g^{\mu\nu} [\ln(\sqrt{-g_{00}})T]_{,\nu} = 0. \quad (2.24)$$

Consequentemente, após algumas manipulações matemáticas implica-se que a lei de Tolmann [32, 35] é

$$\sqrt{-g_{00}}T = cte. \quad (2.25)$$

A lei de Klein é obtida de maneira similar, a partir da lei de Tolmann e da primeira condição de equilíbrio apresentada na equação (2.19). O resultado obtido neste caso é a seguinte expressão,

$$\sqrt{-g_{00}}\mu = cte, \quad (2.26)$$

que é a lei de Klein [33].

Aqui, as leis de Klein e de Tolman foram obtidas de maneira alternativa a partir das condições de equilíbrio aplicadas à função distribuição de Maxwell-Jüttner. No entanto, estas leis também podem ser obtidas a partir de fundamentos puramente termodinâmicos, como demonstrado no artigo original [33]. Fisicamente, a lei de Tolman infere que a relação

entre o tensor métrico e a temperatura do sistema em equilíbrio é uma constante. E, uma relação similar é dada pela lei de Klein a qual infere que a relação entre o tensor métrico e o potencial químico também é constante.

3 APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Neste capítulo será apresentado o método usado para o desenvolvimento desta tese. O método chamado de primeira aproximação pós-newtoniana (1PN), foi desenvolvido com o objetivo de obter-se correções de ordens superiores às obtidas pela teoria newtoniana¹.

3.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO 1PN

Historicamente, foi Einstein quem calculou os primeiros efeitos pós-newtonianos estudando a precessão do periélio de mercúrio [36], mas um estudo sistemático da aproximação pós-newtoniana foi de fato realizado nos trabalhos de Chandrasekhar [8, 37–39]. A importância deste método é justificada ao serem analisados vários problemas relativísticos, tais como: a equação de movimento de um pulsar binário [40, 41], testes do sistema solar da Relatividade Geral [42, 43] e reação da radiação gravitacional [44, 45], por exemplo. Ainda no contexto da aproximação pós-newtoniana, um estudo das leis de conservação para um sistema de N-corpos na primeira aproximação pós-newtoniana foi proposto em [46]. Modelos para ondas gravitacionais e radiação gravitacional também foram propostos utilizando das estruturas do método pós-newtoniano nos trabalhos [47–49].

Aqui, é importante lembrarmos que sistemas astrofísicos nos quais a interação gravitacional é dominante, tais como o Sistema Solar, são descritos adequadamente pela teoria newtoniana. Porém, para sistemas massivos e de altas velocidades é a Relatividade Geral que descreve corretamente. Nestes casos, o movimento é descrito pelas equações de campo de Einstein, as quais são equações não-lineares, e que em geral não são possíveis de serem solucionadas exatamente. Para encontrar umas das soluções exatas² destas equações, é necessário supor condições como: estaticidade e isotropia. Porém, as condições impostas para encontrar tal solução descreve os sistemas astrofísicos parcialmente, pois estes sistemas não são estáticos e nem isotrópicos.

Considerando os problemas mencionados pelas teorias newtoniana e da Relatividade Geral para uma descrição adequada dos sistemas astrofísicos, torna-se necessário desenvolver métodos de aproximação sistemáticos que não dependam de quaisquer propriedades de simetria do sistema. Atualmente, existem dois métodos particularmente úteis para este propósito, sendo eles: aproximação pós-newtoniana e aproximação de campo fraco. O primeiro método é usado para descrever sistemas de partículas que se movem lentamente interagindo gravitacionalmente, como o sistema solar. O segundo método, chamado de

¹A aproximação pós-newtoniana permite que todas as grandezas físicas relacionadas a estes sistemas de partículas, sejam expressos em termos de expansões em séries com o menor parâmetro sendo $\tilde{v}/c \ll 1$. Consequentemente, permitindo determinar expansões de ordens superiores.

²A solução exata é chamada de métrica de Schwarzschild.

aproximação de campo fraco, o qual trata de campos em uma ordem de aproximação inferior de aproximação, mas admite que a matéria passa a se mover relativisticamente (ou seja, partículas com velocidades próximas à velocidade da luz) e, portanto, é um método adequado para abordar a radiação gravitacional, por exemplo [6]. Nesta tese, será considerado para o estudo proposto apenas o método da primeira aproximação pós-newtoniana.

3.2 MÉTODO DA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Aqui, serão demonstradas as principais relações e expressões do método pós-newtoniano. Sistemas de partículas como o Sol e os planetas são unidos mutuamente devido à interação gravitacional entre eles. Da mecânica newtoniana, supondo que a energia média é nula, tem-se que a energia cinética destes sistemas é aproximadamente da mesma ordem que a energia gravitacional potencial, ou seja

$$\tilde{v}^2 \approx \phi, \quad (3.1)$$

onde \tilde{v} significa a velocidade do sistema e ϕ é o potencial gravitacional.

Considerando uma partícula teste em movimento de queda livre, a equação de movimento é dada por

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt}, \quad (3.2)$$

em termos de coordenadas espaciais e do tempo próprio.

Na teoria newtoniana, a equação de movimento é dada apenas pelo primeiro termo da equação (3.2), ou seja

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}, \quad (3.3)$$

Como $g_{00} - 1$ é da ordem de GM/r , então na aproximação newtoniana $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ é da ordem de GM/r^2 que por consequência é da ordem de v^2/r , pois são considerados apenas os termos de primeira ordem para a velocidade.

O objetivo de utilizar o método pós-newtoniano é calcular $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ na ordem de v^4/r . Sendo assim, para a equação (3.2) é necessário obter as componentes de ordem superior para a conexão afim. Ou seja, é necessário calcular

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i & \text{ até a ordem de } v^4/r, \\ \Gamma_{0j}^i & \text{ até a ordem de } v^3/r, \\ \Gamma_{jk}^i & \text{ até a ordem de } v^2/r, \\ \Gamma_{00}^0 & \text{ até a ordem de } v^3/r, \\ \Gamma_{0j}^0 & \text{ até a ordem de } v^2/r, \\ \Gamma_{jk}^0 & \text{ até a ordem de } v/r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Considerando o Princípio de Equivalência, para qualquer variedade é esperado que o

espaço-tempo próprio possa ser considerado localmente como um espaço plano. Sendo assim, para a aproximação pós-newtoniana, o tensor métrico pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + {}^2g_{00} + {}^4g_{00} + \dots, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + {}^2g_{ij} + {}^4g_{ij} + \dots, \\ g_{0i} &= {}^1g_{0i} + {}^3g_{0i} + {}^5g_{0i} + \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o símbolo denota ${}^n g_{\mu\nu}$ significa o termo em $g_{\mu\nu}$ de ordem $(\tilde{v}/c)^n$. As potências ímpares de (\tilde{v}/c) que aparecem em g_{0i} ocorrem porque estas componentes mudam de sinal sob a transformação $t \rightarrow -t$.

Aqui, algumas definições e relações básicas são apresentadas para a primeira aproximação pós-newtoniana. De maneira similiar ao realizado para o tensor métrico, é possível escrever as expansões para as componentes da conexão afim e do tensor energia-momento.

As componentes da conexão afim podem ser escritas em termos do tensor métrico, a partir da seguinte definição

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right], \quad (3.6)$$

onde $g^{\mu\rho}$ é o tensor métrico com a contração dos índices.

Usando (3.5) temos as seguintes expressões para as componentes $\Gamma_{00}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{0i}^0$:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = {}^2\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + {}^4\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \dots, \quad (3.7)$$

e as componentes $\Gamma_{0j}^i, \Gamma_{00}^0, \Gamma_{ij}^0$ são dadas por

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = {}^3\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + {}^5\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \dots, \quad (3.8)$$

onde ${}^N\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ denotam os termos de $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ de ordem $(\tilde{v}/c)^N$.

As componentes para (3.4), explicitamente são dadas por [6]

$${}^2\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial({}^2g_{00})}{\partial x^i}, \quad (3.9)$$

$${}^4\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial({}^4g_{00})}{\partial x^i} + \frac{\partial({}^3g_{i0})}{\partial t} + \frac{1}{2} {}^2g_{ij} \frac{\partial({}^2g_{00})}{\partial x^j}, \quad (3.10)$$

$${}^3\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial({}^3g_{i0})}{\partial x^j} + \frac{\partial({}^2g_{ij})}{\partial t} - \frac{\partial({}^3g_{j0})}{\partial x^i} \right], \quad (3.11)$$

$${}^2\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial({}^2g_{ij})}{\partial x^k} + \frac{\partial({}^2g_{ik})}{\partial x^j} - \frac{\partial({}^2g_{jk})}{\partial x^i} \right], \quad (3.12)$$

$${}^3\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial({}^2g_{00})}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$${}^2\Gamma_{0i}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial({}^2g_{00})}{\partial x^i}, \quad (3.14)$$

$${}^3\Gamma_{ij}^0 = 0. \quad (3.15)$$

Para o tensor de Ricci, partimos da seguinte definição

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda = \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda. \quad (3.16)$$

Das equações (3.7)-(3.9) são obtidas as componentes de $R_{\mu\kappa}$,

$$\begin{aligned} R^{00} &= {}^2R^{00} + {}^4R^{00} + \dots, \\ R^{i0} &= {}^3R^{i0} + {}^5R^{i0} + \dots, \\ R^{ij} &= {}^2R^{ij} + {}^4R^{ij} + \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde ${}^N R_{\mu\nu}$ significa o termo em $R_{\mu\nu}$ de ordem (\tilde{v}^N/r^2) . É possível escrevermos as componentes do tensor de Ricci em termos da conexão afim a partir da definição (3.16), ou ainda em termos do tensor métrico usando as expressões (3.9) e (3.14) [6].

Com as expansões do tensor de Ricci descritas acima, é possível escrever as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\kappa} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_\lambda^\lambda \right). \quad (3.18)$$

Seguindo a mesma idéia, a partir das interpretações físicas do tensor energia-momento, como a densidade de energia, o fluxo de momento e o fluxo de energia, T^{00} , T^{i0} e T^{ij} ,

temos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} T^{00} &= {}^0T^{00} + {}^2T^{00} + \dots, \\ T^{i0} &= {}^1T^{i0} + {}^3T^{i0} + \dots, \\ T^{ij} &= {}^2T^{ij} + {}^4T^{ij} + \dots, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde ${}^N T_{\mu\nu}$ significa o termo em $T_{\mu\nu}$ de ordem $(M/r^3)\tilde{v}^N$. Em particular, ${}^0T^{00}$ significa a densidade de energia no referencial em repouso, enquanto ${}^2T^{00}$ é a parte a primeira correção relativista da densidade de energia. As expansões da equação (3.19) levam a uma consistente solução das equações de campo Einstein [6]. As componentes do tensor métrico podem ser escritas em termos dos potenciais newtoniano ϕ e pós-newtonianos ψ e ξ_i definidos a partir das expansões do tensor métrico. Para isso, as equações de campo devem ser escritas em termos das coordenadas harmônicas, coordenadas tais que $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. Levando isso em consideração, as expansões do tensor métrico até primeira ordem, superior às obtidas pela teoria newtoniana, temos

$$\begin{aligned} {}^2g_{00} &= -2\frac{\phi}{c^2}, \\ {}^4g_{00} &= -2\frac{(\phi^2 + \psi)}{c^4}, \\ {}^2g_{ij} &= -2\delta_{ij}\frac{\phi}{c^2}, \\ {}^1g_{0i} &= 0, \\ {}^3g_{0i} &\equiv \frac{\xi_i}{c^3}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir das equações (3.5) e (3.20), as expansões para o tensor métrico são escritas explicitamente como

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 - 2\frac{\phi}{c^2} - 2\frac{(\phi^2 + \psi)}{c^4}, \\ g_{0i} &\equiv \frac{\xi_i}{c^3}, \\ g_{ij} &= 1 - 2\delta_{ij}\frac{\phi}{c^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Os potenciais ϕ e ψ que aparecem na equação (3.21) são conectados com o tensor energia-momento pelas equações de campo de Einstein. Além disso, utilizando as expansões (3.19) tem-se que as equações de Einstein são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{4\pi G}{c^2} {}^0T_{00}, \\ \nabla^2\psi &= 4\pi G({}^2T_{00} + {}^2T_{ii}) + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2\xi^i &= \frac{16\pi G}{c} {}^1T_{0i}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

juntamente com a condição harmônica

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\xi^i}{\partial x^i} = 0. \quad (3.23)$$

Para escrevermos a equação de movimento em termos dos potenciais gerais ϕ , ψ , e ξ , substitui-se as expansões dadas em (3.24) - (3.30) em (3.2),

$${}^2\Gamma_{00}^i = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}, \quad (3.24)$$

$${}^4\Gamma_{00}^i = \frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial\xi_i}{\partial t}, \quad (3.25)$$

$${}^3\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (3.26)$$

$${}^2\Gamma_{jk}^i = -\delta_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial\phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial\phi}{\partial x^i}, \quad (3.27)$$

$${}^3\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (3.28)$$

$${}^2\Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}, \quad (3.29)$$

$${}^3\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial\xi_j}{\partial x^i} \right) - \delta_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (3.30)$$

Consequentemente, a equação do movimento [6, 14] é dada por

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\phi - \frac{1}{c^2} \left[\nabla(2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial\xi}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \xi) - 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla\phi) + \mathbf{v}^2 \nabla\phi \right]. \quad (3.31)$$

onde $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ e \mathbf{v} é a velocidade das partículas.

Uma outra maneira de se obter a equação de movimento (3.31) é a partir da equação de Lagrange [6],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad (3.32)$$

onde a lagrangiana do sistema é dada por,

$$L = \frac{v^2}{2} - \phi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\phi^2}{2} + \frac{3\phi v^2}{2} - \frac{v^4}{8} + \psi - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} \right). \quad (3.33)$$

A lagrangiana da equação (3.33) é obtida da seguinte definição $2L = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$ (mais detalhes [14]). Ainda, substituindo (3.33) em (3.32) e realizando as derivadas, também obtém-se (3.31).

Ainda se tratando das grandezas físicas relevantes para a descrição do sistema considerado temos a equação para a energia em primeira aproximação pós-newtoniana (1PN). Tal equação, foi obtida em [14], onde foi utilizado o método da aproximação pós-newtoniana. A equação para a energia foi obtida, para uma partícula em queda-livre numa região de campos gravitacionais estáticos ($\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ e $\xi_i = 0$). A lagrangiana correspondente ao movimento desta partícula pode ser escrita em termos do tensor métrico e das quadri-velocidades da partícula e é dada por [14]

$$2\tilde{L} = g_{\mu\nu}u^\nu u^\mu, \quad (3.34)$$

onde u^μ representa a quadri-velocidade das partículas do gás enquanto que U^μ representa a quadri-velocidade do gás. Para escrever a equação (3.34) em termos dos potenciais gravitacionais, foram adotadas algumas convenções:

$$x^\mu = (ct, x^i), \quad u^\mu = \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0}, \quad (3.35)$$

onde x^μ são as posições da partícula, τ significa o tempo próprio da partícula, $\partial x^0 / \partial \tau = u^0$ e $\partial x^\mu / \partial x^0 = v^\mu = (1, v^i/c)$.

Ainda, de acordo com [6] o elemento de linha em termos dos potenciais newtonianos e pós-newtonianos, é escrito da seguinte forma

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.36)$$

utilizando as expansões para as componentes do tensor métrico, até a ordem de $1/c^4$ temos

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2(\phi^2 + \psi)}{c^4} \right) (dx^0)^2 - 2\frac{\xi_i}{c^3} dx^0 dx^i - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.37)$$

Portanto, é possível escrevermos a equação (3.34) da seguinte maneira,

$$2\tilde{L} = \left(-1 - 2\frac{\phi}{c^2} - 2\frac{(\phi^2 + \psi)}{c^4}\right)\dot{t} + \left(1 - 2\frac{\phi}{c^2}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j\delta_{ij}. \quad (3.38)$$

onde as grandezas com ponto em cima denotam as derivadas em relação a τ , por exemplo $\dot{t} = \frac{\partial x^0}{\partial \tau}$.

Desde que esta lagrangiana seja independente do tempo, a energia é dada por

$$E = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}}, \quad (3.39)$$

é a primeira integral de movimento. A equação (3.39) é obtida a partir da definição de momento [14]. Fazendo a derivada da lagrangiana em relação a \dot{t} a seguinte equação é obtida

$$E = \left(1 + 2\frac{\phi}{c^2} + 2\frac{(\phi^2 + \psi)}{c^4}\right)\dot{t}. \quad (3.40)$$

Sendo $u^0 = \dot{t}/c$. Neste caso, as componentes da quadri-velocidade das partículas de um gás u^μ na 1PN aproximação, são dadas por

$$u^0 = c \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} + \frac{3v^4}{c^4} - \frac{5v^2\phi}{2c^4} + \frac{\phi^2}{2c^4} - \frac{\psi}{c^4}\right),$$

$$u^i = \frac{u^0 v^i}{c}, \quad (3.41)$$

onde v é a velocidade da partícula. Aqui, o quadri-momento das partículas do gás é dado pela expressão $p^\mu = mu^\mu$, onde m é a massa da partícula em repouso.

Para obtermos a expressão para a energia substitui-se a primeira equação de (3.41) em (3.40). Com isso, a expressão para energia na primeira aproximação pós-newtoniana obtida em [14] é dada por

$$E = m \left[\frac{v^2}{2} + \phi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\phi^2}{2} + \frac{3\phi v^2}{2} - \frac{3v^4}{8} + \psi \right) \right]. \quad (3.42)$$

Vale a pena notar que a expressão da energia é independente do vetor ξ^i , isso se deve ao fato de os campos serem considerados estáticos. Na presença de campos estáticos, temos que $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ e $\xi_i = 0$.

Neste capítulo, apresentamos os principais aspectos do método da aproximação pós-newtoniana que serão utilizados no desenvolvimento dos cálculos desta tese.

4 MODELO DE CURVAS DE ROTAÇÃO DE GALÁXIAS EM 1PN

Neste capítulo temos dois objetivos. O primeiro objetivo é apresentar em detalhe o modelo teórico obtido a partir dos fundamentos da Mecânica Estatística e do método pós-newtoniano. O segundo é a partir da proposta deste modelo descrever o comportamento das estruturas astrofísicas tais como as galáxias.

Para a descrição destes sistemas, podemos seguir por dois caminhos distintos. Um deles é considerarmos hipóteses válidas para as quais tal sistema possa ser descrito em termos de uma função distribuição, levando em conta que esta função distribuição satisfaça uma equação cinética. O outro é solucionarmos a equação dinâmica e determinarmos as trajetórias de cada uma das partículas. Como o sistema é formado por um número muito grande de partículas, a segunda abordagem mencionada não é adequada. Portanto, a primeira alternativa sugerida parece ser uma idéia promissora. Com isso em mente, esta foi a abordagem escolhida para a elaborarmos este modelo.

Para a construção deste modelo consideramos duas hipóteses: a primeira hipótese é que as estrelas e gás que formam as galáxias são considerados como partículas que interagem entre si. Como tais constituintes do sistema são muito menores comparados ao sistema como um todo, a hipótese é válida. A partir desta primeira hipótese, as galáxias são consideradas como um conjunto de partículas que formam um ensemble de partículas. Desta forma, a descrição do movimento destas partículas é feito a partir de uma função distribuição que satisfaz uma equação cinética [18], a equação de Boltzmann. A função distribuição estudada é uma função das posições e momentos das partículas em um espaço de fase de seis dimensões. Uma vez que a função distribuição é obtida, é possível determinar as principais características do sistema considerado. Por exemplo, a velocidade quadrática média e outros momentos da função distribuição [18]. A segunda hipótese considerada está relacionada com as colisões entre os pares de partículas. Uma vez que a distância entre as partículas do sistema são muito grandes, a colisão entre os pares de partículas são eventos raros. Portanto, o operador colisão da equação de Boltzmann pode ser desconsiderado. Com isto, usamos a equação de Boltzmann sem colisões ¹. Um exemplo de aplicação física para esta equação é o de um gás descrito pela equação de Boltzmann em equilíbrio, no qual o centro de gravidade segue uma geodésica circular no campo de Schwarzschild [19]. Outro exemplo é o caso de halos de matéria escura, nos quais a matéria escura interage somente gravitacionalmente e o que sabemos até o momento é que a seção de choque da matéria escura é consistente com zero. Assim, podemos considerar que a matéria escura praticamente não colide, ou se o fazem é de forma desprezível até o grau de precisão das observações e experimentos atuais, portanto podemos considerar a matéria escura como um sistema não-colisional e usar a equação de Vlasov para descrever sua evolução [4].

¹Tal equação, é também conhecida como equação de Vlasov [18].

Na descrição deste modelo, consideramos um sistema de partículas autogravitantes descrito pela função distribuição de Maxwell-Jüttner, a qual satisfaz a equação de Boltzmann relativista sem colisões. A partir destas equações, obtivemos a função distribuição de Maxwell-Jüttner na primeira aproximação newtoniana. Para isto, é considerada uma velocidade, a qual chamamos de velocidade peculiar associada a velocidade das partículas no referencial fixo no gás. Além disso, é usada a lei de Tolman [32] e resolvida a integral sobre o espaço de fase de todas as velocidades peculiares. Na sequência, o fluxo de partículas para a primeira ordem da aproximação newtoniana é determinado, enquanto que as componentes do tensor energia-momento são obtidas para diferentes ordens da aproximação considerada. Desta maneira, obtivemos o tensor energia-momento a partir da função distribuição de Maxwell-Jüttner na primeira aproximação newtoniana. Os resultados obtidos para as equações que descrevem as partículas do sistema estudado nesta tese coincidem com os obtidos anteriormente para a descrição de fluidos em [6]. Além disso, é importante mencionar que os resultados obtidos neste capítulo são obtidos a partir de primeiros princípios da Mecânica Estatística como uma maneira alternativa da utilizada em [6].

O sistema de equações não-lineares associados aos campos potenciais gravitacionais é resolvido numericamente usando o software Mathematica. Finalmente, obtivemos os perfis das curvas em 1PN para a densidade de massa, velocidade circular, energia potencial gravitacional e pressão. A partir das curvas obtidas, foi possível comparar o comportamento newtoniano e pós-newtoniano destas grandezas físicas. Além disso, apresentamos um procedimento para a obtenção dos perfis da velocidade circular que tem o comportamento das curvas suaves para grandes valores do raio. Com isto, obtivemos curvas de rotação circular na primeira aproximação pós-newtoniana que são usadas para descrever o disco estelar de galáxias espirais. Além disso, uma descrição para o halo de matéria escura é apresentado, fazendo-se o uso do perfil de densidade de Burkert [21]. Com estas duas descrições são obtidas as curvas de rotação para o modelo de galáxias, e estas curvas são comparadas aos dados observacionais.

Este capítulo será dividido da seguinte maneira: primeiramente será feita uma breve descrição da estrutura, composição e classificação das galáxias. Na sequência, será apresentado detalhadamente os campos obtidos na aproximação pós-newtoniana, tais como a densidade de massa, pressão e energia potencial, além da obtenção das curvas de rotação circular correlacionando duas soluções diferentes para um determinado valor do raio [20]². A partir dos perfis obtidos para esta solução, será apresentada uma descrição do disco estelar de uma galáxia espiral na primeira aproximação pós-newtoniana. Além disso, será descrito o halo de matéria escura a partir de um modelo teórico advindo da literatura. Por fim, será realizada a comparação entre as curvas de rotação teóricas e observacionais para galáxias espirais. A proposta do modelo apresentado nesta tese, é analisar o papel das correções pós-newtonianas associadas às curvas de rotação, e consequentemente qual o seu papel na comparação das curvas teóricas aos dados observacionais.

²O objetivo da obtenção destas curvas é reproduzir as bem conhecidas características observacionais de curvas de rotação de galáxias, ou seja, um regime linear em raios pequenos, passando pelas extremidades e no final, para raios maiores um perfil suave.

4.1 GALÁXIAS

Galáxias são sistemas autogravitantes, ou seja, sistemas massivos no qual a principal interação entre seus constituintes é a interação gravitacional. São sistemas complexos formados por muitos corpos que interagem gravitacionalmente. Tipicamente, uma galáxia é constituída por aproximadamente 10^5 a 10^{12} estrelas, e contém quantidades consideráveis de gás e poeira interestelar.

A formação de estrelas ocorre em regiões densas da galáxia formadas a partir do gás interestelar. Além disso, há a presença de matéria escura em galáxias e em aglomerados de galáxias e a dinâmica destas estruturas é amplamente dominada por essa componente de matéria desconhecida. A natureza da matéria escura é ainda desconhecida [5]. Portanto, as galáxias são constituídas por matéria escura e matéria bariônica ³.

A evolução das galáxias está diretamente relacionada com a evolução do Universo [50]. Uma galáxia é formada a partir de uma nuvem imensa de matéria escura, gás e poeira em rotação que existe previamente no espaço, e que se contrai devido à interação gravitacional. Quando a densidade é suficientemente alta, ao mesmo tempo que perde energia devido às colisões no seu interior, a matéria escura se contrai devido à conservação do momento angular. A nuvem inicial toma a forma de um disco perpendicular ao eixo de rotação. Durante a evolução da galáxia, as estrelas formam-se a partir do gás inicial que há no meio interestelar nele depositando elementos pesados, gerados por elas mesmas. Há portanto, um empobrecimento do conteúdo global de gás, num processo que dura bilhões de anos (aproximadamente 10^9 anos). Os diferentes tipos de galáxias devem-se a diferentes condições iniciais de formação e ao modo como reagem às interações gravitacionais.

Vale a pena descrevermos algumas das propriedades básicas das galáxias para dar uma idéia da riqueza da estrutura deste estudo. A classificação da morfologia destas estruturas foi feita por Hubble em 1936 [51], e posteriormente melhorada por Sandage [52]. O esquema de classificação de Hubble consiste em duas sequências principais de classificação: elípticas, espirais e um tipo intermediário, as lenticulares. As galáxias irregulares formam uma quarta classe destas estruturas, mas não fazem parte do sistema de classificação original de Hubble. Hubble sugeriu uma evolução para a sequência das galáxias, ou seja, as galáxias elípticas originavam as espirais, sendo apenas a dinâmica das galáxias a única responsável pela sua evolução.

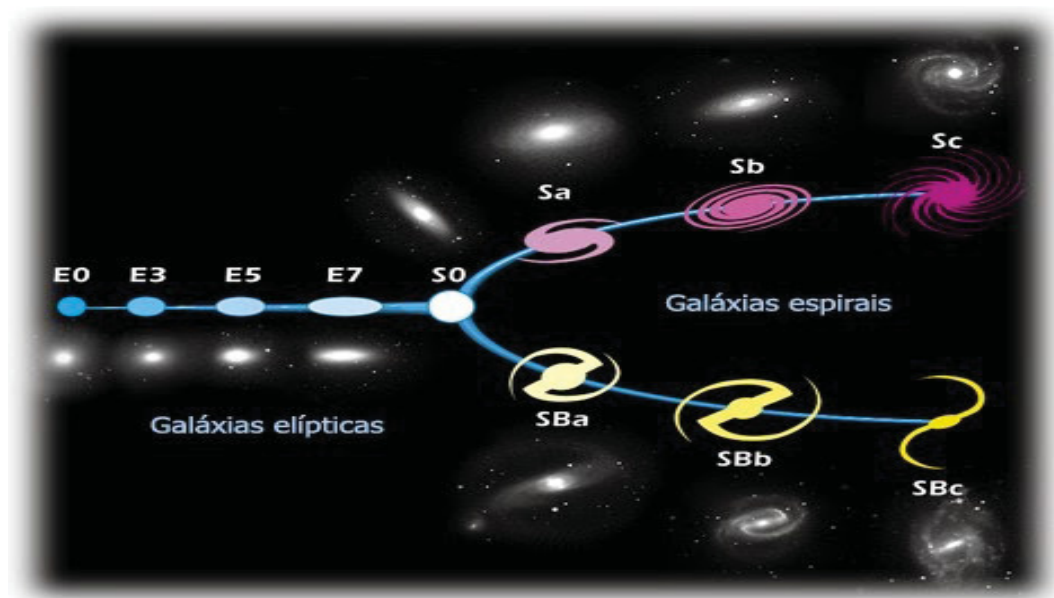
4.1.1 Classificação da Morfologia das Galáxias

A figura 4.1 ⁴ representa o esquema de classificação de galáxias de Hubble.

³Matéria Bariônica é a matéria constituída por prótons, neutrões e elétrons, e é aproximadamente 4% de toda a matéria do Universo.

⁴Disponível em: <https://www.spacetelescope.org/images/heic9902o/>. Acesso em: maio, 2018.

Figura 4.1: Esquema de Classificação de Hubble.



Fonte:Space Telescope Science Institute.

Aqui, é interessante notar que as galáxias elípticas representam apenas cerca de 10% das galáxias brilhantes observadas e não possuem estrutura espiral discernível [53].

A classificação de Hubble é dividida da seguinte maneira: galáxias espirais, espirais barradas, elípticas, irregulares e subclasses. Na figura 4.1 está representada a sequência que vai das galáxias mais velhas até as mais jovens (da esquerda para a direita). As galáxias possuem a seguinte classificação de acordo com a figura 4.1, acima:

- E: Galáxias Elípticas. São identificadas de acordo com a sua elipticidade, variando de E0 (praticamente esféricas) até E7(bastante alongadas);
- S0: Galáxias Lenticulares (tipo hipotético na classificação feita por Hubble em 1936);
- S: Galáxias Espirais. São identificadas por: Sa, Sb e Sc, conforme a morfologia dos braços espirais;
- SB: Galáxias Espirais Barradas (SBa, SBb, SBc), pois apresentam uma estrutura em forma de barra atravessando o núcleo.

Além dos tipos de galáxias mencionadas, há as galáxias irregulares (I) que não possuem morfologia definida e não estão representadas no esquema de classificação da figura 4.1.

Na sequência, será feita uma breve descrição sobre a classificação morfológica dos diferentes tipos de galáxias mencionados acima, de acordo com [50, 54].

Galáxias Elípticas:

As galáxias elípticas tem este nome devido a sua forma. Este tipo de galáxia não possui braços espirais. Como mencionado anteriormente, pela classificação de Hubble estas

galáxias são subdivididas de acordo com a sua elipticidade, sendo E0 galáxias praticamente esféricas até E7 galáxias bastante alongadas. As maiores galáxias elípticas formam uma classe em separado, as elípticas gigantes, e podem chegar a alguns milhões de parsecs de diâmetro.

Este tipo de galáxia apresenta uma aparência mais regular do que as galáxias espirais. São galáxias que possuem pouco ou nenhum gás interestelar e poeira. Além disso, apresentam baixa taxa de formação estelar, uma vez que não possuem disco estelar [54]. Galáxias elípticas tem tamanhos variados, das menores às maiores galáxias do Universo e são estruturas consideradas velhas comparadas a idade do Universo.

Galáxias Lenticulares:

As galáxias lenticulares são objetos em transição entre galáxias elípticas e espirais: apresentam como as galáxias espirais (disco de rotação, bojo e algumas possuem braços), e como as galáxias elípticas (nenhuma ou pouca quantidade de gás). São galáxias raras e geralmente estão em regiões de baixa densidade.

Galáxias Irregulares:

As galáxias irregulares são, de uma maneira geral, menos luminosas e possuem menor massa comparadas às galáxias espirais, sem concentração central de massa, nem simetria de rotação. Apresentam formação estelar elevada e grandes quantidades de gás. A abundância em metais é baixa. São normalmente o resultado da interação entre outras galáxias, essa interação faz com que percam a sua forma original e reiniciem períodos de formação estelar intensa.

Pela classificação de Hubble, as galáxias irregulares são aquelas que não apresentam simetria circular ou rotacional, mas uma estrutura caótica ou irregular. Muitas irregulares parecem apresentar atividade de formação estelar relativamente intensa, sua aparência sendo dominada por estrelas jovens brilhantes e nuvens de gás ionizado distribuídas irregularmente. As galáxias irregulares também lembram as espirais no seu conteúdo estelar, que inclui estrelas jovens e velhas. Um fato interessante sobre estas galáxias é que, os dois exemplos mais conhecidos de galáxias irregulares são a Grande e a Pequena Nuvens de Magalhães, consideradas satélites da Via Láctea. Estas galáxias são visíveis a olho nu no Hemisfério Sul [55].

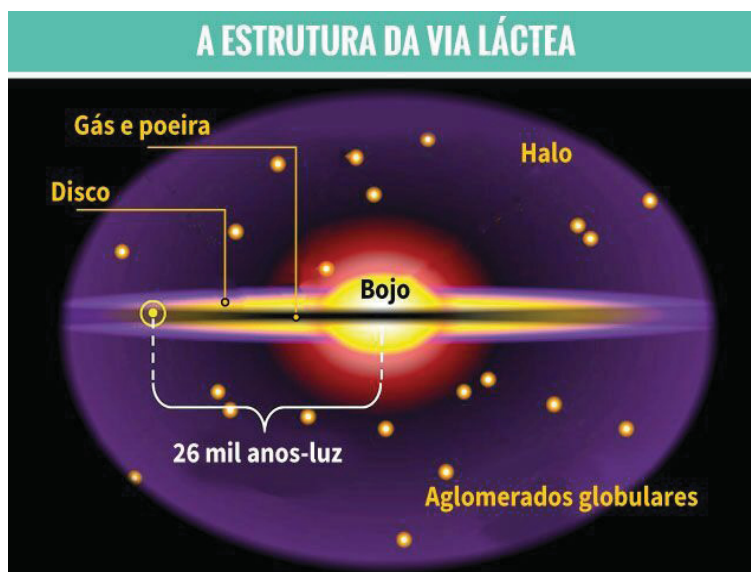
Galáxias Espirais:

As galáxias espirais são estruturas com forma espiral que possuem as seguintes estruturas: bojo central, disco estelar onde se localiza os braços espirais e halo de matéria escura. Cerca de 80% das galáxias mais luminosas do Universo são do tipo espirais e, nelas se incluem a Via Láctea e a Grande Nebulosa de Andromeda, visíveis a olho nu.

Para melhor compreensão desta estrutura que é o foco da análise desta tese, na figura 4.2⁵, é apresentado um esquema representativo da estrutura de uma galáxia espiral.

⁵Disponível em:<http://www.cdcc.sc.usp.br/cda/cursos/2018/introducao-astronomia-1-semester/aula-7-V-L-galaxias-Universo/1-Via-Lactea-e-galaxias.pdf>. Acesso em: maio, 2018.

Figura 4.2: Esquema estrutura galáxia espiral.



Fonte: André Luiz da Silva/CDA/CDCC/USP

Fonte: André Luiz da Silva/CDA/CDCC/USP.

A figura 4.2 apresenta as estruturas que constituem uma galáxia espiral. O bojo é geralmente a parte mais brilhante de uma galáxia espiral. A característica mais marcante de galáxias desse tipo de galáxia é a existência de braços espirais, enrolados em torno do núcleo e bojo. Quando vistas de perfil, as galáxias espirais revelam-se extremamente achatadas, como um disco. Os braços espirais são delineados por estrelas muito jovens e massivas, frequentemente associadas a nebulosas ionizadas, chamadas comumente de regiões HII [50]. Esses objetos conferem aos braços espirais uma coloração branco-azulada, muito característica. Associadas aos braços espirais existem nuvens de poeira, sempre associadas a nuvens de gás molecular, regiões de formação de estrelas [54]. Em fotografias, as nuvens de gás e poeira aparecem sob a forma de linhas escuras tortuosas, permeando os braços espirais. O número de braços espirais, assim como seu aspecto, é variável, mas geralmente apresentam-se aos pares. Existem também galáxias com quatro braços e/ou braços espúrios, que geralmente são ramificações dos braços principais. Quanto ao formato dos braços espirais, Hubble assinalou dois tipos: espirais normais e “barradas”, designadas respectivamente pelas letras S e SB. Nas espirais normais, os braços espirais estendem-se a partir da periferia do bojo até os limites exteriores da galáxia. Já nas espirais barradas, a estrutura espiral surge de dentro do bojo da galáxia e estende-se para fora, ao longo do plano da galáxia, como uma barra com comprimento de vários quiloparsecs. A partir de um certo ponto os braços seguem uma curva abrupta, como um cotovelo, de onde seguem como espirais mais ou menos normais, até os limites externos da galáxia.

As galáxias espirais são subdivididas nas seguintes categorias: Sa, Sb, Sc, SBa, SBb e SBc, de acordo com o grau de desenvolvimento, enrolamento dos braços espirais e com o tamanho do núcleo comparado ao disco.

- Sa: braços espirais enrolados que são lisos mostrando nenhuma resolução em estrelas.

O bojo ou barra central é dominante, não apresenta estrutura;

- Sb: tem braços espirais mais abertos, que mostram resolução em estrelas. A componente central esferoidal ou barra é geralmente menor do que em galáxias Sa;
- Sc: galáxias têm braços espirais muito abertos que são irregulares e são resolvidos em aglomerados estelares e regiões de hidrogênio ionizado. A componente esferoidal é muito pequena. Em galáxias espirais barradas, a barra é resolvida em aglomerados e regiões HII e não é tão proeminente quanto nas classes Sa ou Sb.

Ainda vale a pena mencionarmos que na estruturas das galáxias existem regiões as quais são designadas de regiões HI e HII. A região HI é uma região da galáxia constituída por gás hidrogênio neutro (HI) que emite uma linha espectral no comprimento de onda de 21 cm, e é usada para mapear a distribuição desse gás. Este gás tem um papel chave na determinação da estrutura espiral de uma galáxia. Já as regiões HII, são regiões da galáxia que possuem grande quantidade de hidrogênio atômico e ionizado, denominado pelos astrônomos HII (região HI sendo hidrogênio atômico neutro, e H_2 sendo hidrogênio molecular).

4.2 ANÁLISES NA APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Nesta seção, será apresentada a obtenção da função distribuição de Maxwell-Jüttner na primeira aproximação pós-newtoniana, a obtenção do tensor-energia momento e do quadri-fluxo de partículas também em 1PN e a análise de algumas soluções estacionárias para os potenciais gravitacionais considerados. Além disso, serão analisados e comparados os seguintes campos: densidade de energia, energia potencial gravitacional, pressão e velocidade circular para as duas aproximações: newtoniana e pós-newtoniana.

4.2.1 Função Distribuição de Maxwell-Jüttner na 1PN

No Capítulo 2, foi visto que podemos escrever a função distribuição de Maxwell-Jüttner conforme a equação (2.9) em termos da quadri-velocidade e do quadri-momento das partículas do gás. Uma outra maneira de escrevermos a função distribuição é em termos do potencial químico μ como na equação (2.14). Comparando as duas expressões (2.9) e (2.14) para a função de distribuição de Maxwell-Jüttner,

$$\frac{n}{4\pi m^2 c k T K_2(\zeta)} = \exp\left(\frac{\mu}{kT} - 1\right) = \exp\left(\frac{\mu_0}{kT_0} - 1\right), \quad (4.1)$$

onde n_0 é a densidade do número de partículas no equilíbrio, T_0 é a temperatura no equilíbrio e $\zeta_0 = mc^2/kT_0$ é a razão entre a energia de repouso das partículas do gás e a energia térmica do gás no equilíbrio. A última igualdade da equação acima segue das leis de Tolman [32] e Klein [33], conforme visto na seção 2.2.2 do Capítulo 2.

Como consequência de tais leis, é possível escrevermos o lado esquerdo da equação (4.1) em termos das quantidades no equilíbrio n_0 e T_0 ,

$$\frac{n}{4\pi m^2 c k T K_2(\zeta)} = \frac{n_0}{4\pi m^2 c k T_0 K_2(\zeta_0)}. \quad (4.2)$$

Agora, utilizando as equações (4.1) e (4.2) acima, calculamos a função distribuição de Maxwell-Jüttner (3.33) para a aproximação pós-newtoniana. Como visto anteriormente no Capítulo 3 de acordo com [6], o elemento de linha é escrito da seguinte forma

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.3)$$

onde g_{00} , g_{0i} e g_{ij} são as componentes do tensor métrico. E, até a ordem de $1/c^4$,

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2(\phi^2 + \psi)}{c^4}\right) (dx^0)^2 - 2\frac{\xi_i}{c^3} dx^0 dx^i - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.4)$$

Conforme já mencionado anteriormente, na presença de campos estáticos ($\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ e $\xi_i = 0$), segue da equação (4.4) que as componentes da quadri-velocidade u^μ das partículas de um gás na 1PN, são dadas por

$$u^0 = c \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} + \frac{3v^4}{c^4} - \frac{5v^2\phi}{2c^4} + \frac{\phi^2}{2c^4} - \frac{\psi}{c^4}\right), \quad (4.5)$$

$$u^i = \frac{u^0 v^i}{c},$$

onde v é a velocidade das partículas do gás e o índice $i = 1, 2, 3..$ Note que, para o quadri-momento das partículas dos gás, temos $p^\mu = m u^\mu$ onde m é a massa da partícula no referencial em repouso.

A expressão (4.5) também é válida para as componentes da quadri-velocidade do fluido $U^\mu = (U^0, U^0 V^i/c)$. Basta substituírmos u^0 e v^i por U^0 e V^i , respectivamente. Com isso,

$$U^0 = c \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} + \frac{3V^4}{c^4} - \frac{5V^2\phi}{2c^4} + \frac{\phi^2}{2c^4} - \frac{\psi}{c^4}\right). \quad (4.6)$$

Agora, introduzimos uma velocidade peculiar $\mathbf{W} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, a qual é a velocidade das partículas em relação ao referencial fixo no gás. A análise do termo da exponencial da

função distribuição de Maxwell-Jüttner (3.33), é

$$g_{\mu\nu} \frac{p^\mu U^\nu}{kT} = \frac{-mc^2}{kT_0} \left[1 + \frac{W^2}{2c^2} + \frac{\phi}{c^2} + \frac{1}{c^4} \left(\frac{3W^4}{8} - \frac{3W^2\phi}{2} + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})^2}{2} + \frac{V^2 W^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})W^2 + \frac{\phi^2}{2} + \psi \right) \right], \quad (4.7)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade das partículas do gás e \mathbf{V} a velocidade do sistema (partículas + gás). A equação (4.7) foi escrita utilizando-se das equações (4.5) e (4.6). Além disso, a função de Bessel modificada de segunda espécie considerando-se os termos até a ordem de $1/c^2$ é dada pela seguinte equação

$$\frac{1}{K_2(\zeta_0)} = \sqrt{\frac{2mc^2}{\pi kT_0}} e^{\frac{mc^2}{kT_0}} \left(1 - \frac{15kT_0}{8mc^2} + \dots \right), \quad (4.8)$$

em termos do parâmetro $\zeta_0 = mc^2/kT_0$ definido anteriormente.

A função distribuição Maxwell-Jüttner na aproximação pós-newtoniana, é obtida a partir das equações (4.2) - (4.8) considerando-se apenas os termos de ordem até $1/c^2$. Portanto, temos que

$$f = \frac{n_0}{(2\pi mkT_0)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-mW^2}{2kT_0} - \frac{m\phi}{kT_0}} \left[1 - \frac{15kT_0}{8mc^2} - \frac{m}{kT_0 c^2} \left(\frac{3W^4}{8} - \frac{3W^2\phi}{2} + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})^2}{2} + \frac{V^2 W^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})W^2 + \frac{\phi^2}{2} + \psi \right) \right]. \quad (4.9)$$

Uma outra maneira de obter a função distribuição no equilíbrio na aproximação 1PN, é considerar a função distribuição de Maxwell- Boltzmann,

$$f(E) \approx e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (4.10)$$

onde E é a energia da partícula. Na primeira aproximação, a energia é dada pela equação (3.42) [14]. Por consequência disso, é possível inferirmos que a menos do termo $\frac{mc^2}{kT_0}$, as expressões obtidas das duas maneiras distintas para $-E/kT_0$ e $p_\mu U^\mu/kT$ coincidem.

4.2.2 Descrição Macroscópica

Na teoria cinética de gases relativista a definição do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e do quadri-fluxo de partículas N^μ são dados em termos da função distribuição [18], pelas

seguintes equações:

$$T^{\mu\nu} = m^4 c \int u^\mu u^\nu f \frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-u_0} = m^4 c \int u^\mu u^\nu f \frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-(g_{00} u^0 + g_{0i} u^i)}, \quad (4.11)$$

$$N^\mu = m^3 c \int u^\mu f \frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-u_0}. \quad (4.12)$$

Na equação (4.11), o tensor energia-momento é escrito em termos da quadri-velocidade da partícula u^μ , ao invés de ser escrito em termos do quadri-momento $p^\mu = m u^\mu$. O tensor energia-momento é escrito desta maneira conforme [13, 18, 56–59], considerando que o elemento de integração é o invariante $\sqrt{-g} d^3 p / (-p_0)$ com a componente covariante p_0 , o qual é diferente de $\sqrt{-g} d^3 p / (p^0)$ na aproximação 1PN adotado em [13].

Na aproximação 1PN, o elemento diferencial $d^3 u$ escrito em termos da velocidade peculiar \mathbf{W}^i até a ordem de $1/c^2$, é dado por

$$d^3 u = 4\pi \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5(V^2 + 2(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) + W^2)}{2} - 3\phi \right) \right] W^2 dW, \quad (4.13)$$

o qual é obtido a partir do Jacobiano da seguinte transformação $\left| \frac{\partial U^i}{\partial v^j} \right|$, lembrando que $U^i = U^0 v^i / c$ da definição das componentes da velocidade.

Reescrevendo a quadri-velocidade das partículas $-u_0$, até a ordem de $1/c^2$, obtemos a seguinte expressão

$$-(g_{00} u^0 + g_{0i} u^i) = -g_{00} u^0 \left(1 + \frac{g_{0i} u^i}{g_{00} u^0} \right) = u^0 \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right), \quad (4.14)$$

usando as expressões para o tensor métrico dadas em (3.5). Além disso, também até a ordem $1/c^2$, temos a seguinte relação

$$\frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-(g_{00} u^0 + g_{0i} u^i)} = \frac{4\pi}{u^0} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5(V^2 + 2(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) + W^2)}{2} - 7\phi \right) \right] W^2 dW. \quad (4.15)$$

A expressão (4.15) acima, é obtida a partir das equações (3.5), (4.5), (4.13) e a expansão do determinante do tensor métrico $\sqrt{-g} = 1 - 2\phi/c^2 - (\phi^2 - \psi)/c^4$.

Uma vez que a função distribuição é conhecida na aproximação 1PN, é possível obter o fluxo de partículas e o tensor energia-momento nesta aproximação. O fluxo de partículas $N^\mu = \sum_n N^\mu$ e o tensor energia-momento $T^{\mu\nu} = \sum_n T^{\mu\nu}$ são divididos em diferentes ordens da razão $(\bar{v}/c)^n$ (ver [6]), onde \bar{v} pode ser identificado como a velocidade térmica de uma partícula $\sqrt{kT_0/m}$.

Para continuarmos nossos cálculos, é conveniente introduzirmos quantidades adimensionais. Para isto, definimos

$$v_* = \sqrt{\frac{m}{kT_0}}v, \quad \phi_* = \frac{m}{kT_0}\phi \quad \text{e} \quad \psi_* = \left(\frac{m}{kT_0}\right)^2 \psi. \quad (4.16)$$

A integral para quadri-fluxo de partículas N^μ é obtida a partir de (4.12) juntamente com as equações (4.9), (4.15) e (4.16). Para a componente temporal, a solução da integral de N^μ é dada por

$$N^0 = nU^0 = {}^0N^0 + {}^2N^0 = n_0 c e^{-\phi_*} \left[1 + \frac{1}{\zeta} \left(\frac{V_*^2}{2} - \frac{5\phi_*}{2} - \frac{\phi_*^2}{2} - \psi_* \right) \right]. \quad (4.17)$$

A densidade do número de partículas é obtida facilmente a partir da equação (4.17) juntamente com a equação para U^0 . Tal grandeza é dada por,

$$n = n_0 e^{-\phi_*} \left[1 - \frac{1}{\zeta} \left(\frac{3\phi_*}{2} + \frac{\phi_*^2}{2} + \psi_* \right) \right]. \quad (4.18)$$

Ainda, podemos escrever a equação (4.17) da seguinte maneira

$$N^0 = nU^0 = {}^0N^0 + {}^2N^0 = nc \left[1 + \frac{1}{\zeta} \left(\frac{V_*^2}{2} - \phi_* \right) \right]. \quad (4.19)$$

Para as componentes espaciais da densidade do número de partículas, seguimos a mesma metodologia utilizada para a componente temporal. Com isso,

$${}^1N^i + {}^3N^i = ({}^0N^0 + {}^2N^0) \frac{V^i}{c} = nV^i \left[1 + \frac{1}{\zeta} \left(\frac{V_*^2}{2} - \phi_* \right) \right]. \quad (4.20)$$

Os cálculos para determinarmos o tensor energia-momento são realizados da mesma maneira que para o quadri-fluxo de partículas. Logo, a integral para tensor energia-momento em função das quantidades definidas em (4.16), é dada por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 c \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\phi_*} \int \frac{u^\mu u^\nu}{u^0} e^{\frac{-v_*^2}{2}} \left[1 - \frac{kT_0}{mc^2} \left(\frac{15}{8} - \frac{5v_*^2}{2} + \frac{3v_*^4}{8} + 7\phi_* - \frac{3v_*^2\phi_*}{2} + \frac{\phi_*^2}{2} + \psi_* \right) \right] v_*^2 dv_*, \quad (4.21)$$

a equação (4.21) é obtida substituindo (4.9) e (4.15) em (4.11). Acima, $\rho_0 = mn_0$ é a densidade de massa do gás e as quadri-velocidades V e W aparecem os substituímos

$v_* = W + V$, ou seja, a velocidade peculiar. A componentes do tensor energia-momento são dadas pela solução da integral (4.21), ou seja

$${}^0T^{00} + {}^2T^{00} = \varepsilon \left[1 + \frac{1}{c^2} (V^2 - 2\phi) \right], \quad (4.22)$$

$${}^1T^{0i} + {}^3T^{0i} = \frac{V^i}{c} \left[\varepsilon + p + \frac{\varepsilon}{c^2} (V^2 - 2\phi) \right], \quad (4.23)$$

$${}^2T^{ij} + {}^4T^{ij} = p \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} \right] \delta^{ij} + \left[\varepsilon + p + \frac{\varepsilon}{c^2} (V^2 - 2\phi) \right] \frac{V^i V^j}{c}. \quad (4.24)$$

Para obtermos as soluções (4.22) - (4.24), utilizamos algumas identidades não-triviais relacionadas com a integração de diferentes momentos da distribuição Gaussiana, para mais detalhes ver Apêndice [A]. Aqui, a densidade de energia $\varepsilon = \rho c^2$ e a pressão p são dadas por

$$\varepsilon = \rho c^2 = mnc^2 \left(1 + \frac{3kT}{2mc^2} \right), \quad p = nkT, \quad (4.25)$$

onde ρ é a densidade de massa. As expressões (4.22 - 4.24) são as mesmas obtidas a partir da representação do tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (\varepsilon + p) \frac{U^\mu U^\nu}{c^2}, \quad (4.26)$$

considerando o tensor métrico e a quadri-velocidade na aproximação pós-newtoniana aproximam-se da quarta ordem (conforme [6]).

4.2.3 Algumas soluções estacionárias

As equações de campo de Einstein na aproximação 1PN são dadas pela equação (3.22), as quais se reduzem a equações para os potenciais gravitacionais [6]. Retomando,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{4\pi G_0}{c^2} T^{00}, \\ \nabla^2 \psi &= 4\pi G ({}^2T^{00} + {}^2T^{ii}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Conforme o obtido em [14], integramos as componentes do tensor energia-momento no intervalo de $[0, v_e]$, onde v_e é a velocidade de escape. A velocidade de escape é calculada a partir da equação (3.42) para energia na 1PN, considerando que as partículas do gás

alcançam seu valor máximo em $E = 0$. Então, a partícula é incapaz de deixar a distribuição de matéria. De acordo com [14], para ser consistente com a primeira aproximação pós-newtoniana a velocidade de escape deve ser dada por $v_{e*} = \sqrt{-2\phi^*}$. Para o intervalo de integração considerado, temos as seguintes integrais a serem solucionadas,

$${}^0T^{00} = \rho_0 c^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\phi_*} \int_0^{\sqrt{-2\phi_*}} e^{\frac{-v_*^2}{2}} v_*^2 dv_*, \quad (4.28)$$

$${}^2T^{00} = \rho_0 c^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\phi_*} \int_0^{\sqrt{-2\phi_*}} e^{\frac{-v_*^2}{2}} \left[\frac{kT_0}{mc^2} \left(-\frac{15}{8} + 3v_*^2 + \frac{3v_*^4}{8} - 8\phi_* - \frac{3v_*^2\phi_*}{2} + \frac{\phi_*^2}{2} + \psi_* \right) \right] v_*^2 dv_*, \quad (4.29)$$

$${}^2T^{ii} = \rho_0 c^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\phi_*} \int_0^{\sqrt{-2\phi_*}} e^{\frac{-v_*^2}{2}} v_*^4 dv_*. \quad (4.30)$$

Aqui, as integrais foram escritas da seguinte maneira: para as integrais de primeira ordem considera-se os termos até v^2 , e para as de segunda ordem os termos vão até v^4 . É interessante mencionar que para obter a integral da equação (4.30), utiliza-se uma relação de integrais advinda da teoria cinética [7].

Na sequência, realizando as integrações obtemos os seguintes resultados para as componentes do tensor energia-momento, nas diferentes ordens do raio $(v/c)^n$:

$${}^0T^{00} = -\rho_0 c^2 \left[2\sqrt{-\frac{\phi_*}{\pi}} - e^{-\phi_*} \operatorname{erf} \left(\sqrt{-\phi_*} \right) \right], \quad (4.31)$$

$${}^2T^{00} = -\frac{\rho_0 kT_0}{m} \left[\left(3 - \frac{23}{2}\phi_* - 10\phi_*^2 - 2\psi_* \right) \sqrt{-\frac{\phi_*}{\pi}} - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\phi_* - \frac{1}{2}\phi_*^2 - \psi_* \right) e^{-\phi_*} \operatorname{erf} \left(\sqrt{-\phi_*} \right) \right], \quad (4.32)$$

$${}^2T^{ii} = -\frac{\rho_0 kT_0}{m} \left[(6 - 4\phi_*) \sqrt{-\frac{\phi_*}{\pi}} - 3e^{-\phi_*} \operatorname{erf} \left(\sqrt{-\phi_*} \right) \right]. \quad (4.33)$$

Nas equações (4.31) - (4.33) acima, $\operatorname{erf}(\sqrt{-\phi_*})$ é a função erro ⁶ e ${}^2T^{ii}$ se refere ao traço de ${}^2T^{ij}$. Além disso, é possível fazer as seguintes identificações: ${}^0T^{00}$ como a densidade de energia ρc^2 , enquanto que ${}^2T^{00}$ e ${}^2T^{ii}$ como a pressão $\rho_0 kT_0/m$.

Inserindo (4.31) - (4.33) em (4.27), resulta no seguinte sistema de equações acopladas

⁶A função erro $\operatorname{erf}(x)$ é obtida pela integração de uma distribuição normal e sua definição é dada pela seguinte integral $\frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-y^2} dy$.

para os potenciais gravitacionais

$$\nabla^2 \phi_* = -k_J^2 \left[2\sqrt{-\frac{\phi_*}{\pi}} - e^{-\phi_*} \operatorname{erf} \left(\sqrt{-\phi_*} \right) \right], \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_* = -k_J^2 \left[\left(9 - \frac{31}{2}\phi_* - 10\phi_*^2 - 2\psi_* \right) \sqrt{-\frac{\phi_*}{\pi}} - \left(\frac{9}{2} - \frac{7}{2}\phi_* \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}\phi_*^2 - \psi_* \right) e^{-\phi_*} \operatorname{erf} \left(\sqrt{-\phi_*} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $k_J = \sqrt{4\pi G \rho_0 / \bar{v}}$, pode ser identificado como o número de onda de Jeans.

Os potenciais gravitacionais são somente funções da coordenada radial r . Portanto, o sistema de equações (4.34) e (4.35) escrito em coordenadas esféricas, é dado por

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} \right) = \left[2\sqrt{\frac{\tilde{\phi}}{\pi}} - e^{\tilde{\phi}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\tilde{\phi}} \right) \right], \quad (4.36)$$

e

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{r}} \right) = \left[\left(9 + \frac{31}{2}\tilde{\phi} - 10\tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\psi} \right) \sqrt{\frac{\tilde{\phi}}{\pi}} - \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 - \tilde{\psi} \right) e^{\tilde{\phi}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\tilde{\phi}} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Para escrever o sistema de equações constituídos pelas equações (4.36) e (4.37), definimos novas quantidades adimensionais:

$$\tilde{r} = rk_J, \quad \tilde{\phi} = -\phi_* \quad \text{e} \quad \tilde{\psi} = -\psi_*. \quad (4.38)$$

Ainda, para escrever o sistema de equações em coordenadas esféricas, fazemos

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right), \quad (4.39)$$

em que as dependências em θ e φ são iguais a zero.

Por fim, o sistema de equações formado por (4.36) e (4.37), pode ser solucionado numericamente escolhendo condições de contorno apropriadas. De acordo com [14], é possível solucionar este sistema de equações assumindo o centro da configuração e as

seguintes condições de contorno são escolhidas para os os potenciais gravitacionais:

$$\tilde{\phi}(0) = \tilde{\psi}(0) = 1, \quad \left. \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = \left. \frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0. \quad (4.40)$$

Na sequência analisaremos os perfis de densidade de massa, velocidade de partículas teste em movimento circular e energia potencial gravitacional como função da distância radial r . É importante mencionarmos que neste estudo as galáxias são descritas como um ensemble de partículas, logo todas as grandezas físicas analisadas nesta seção são válidas para descrição do sistema considerado.

Densidade de Massa

A densidade de massa pode ser obtida a partir das equações (4.31) e (4.32). Além disso, podemos escrever como a soma das contribuições newtoniana $\tilde{\rho}_N$ e pós-newtoniana $\tilde{\rho}_{PN}$, como segue

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} = \tilde{\rho}_N + \tilde{\rho}_{PN}, \quad (4.41)$$

onde

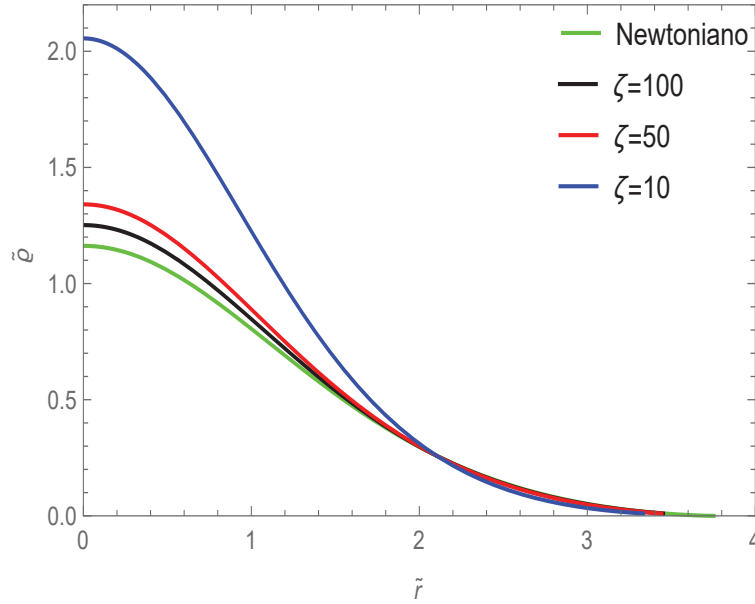
$$\tilde{\rho}_N = \left[2\sqrt{\frac{\tilde{\phi}}{\pi}} - e^{\tilde{\phi}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\tilde{\phi}} \right) \right], \quad (4.42)$$

e

$$\tilde{\rho}_{PN} = \left[\left(9 + \frac{31}{2}\tilde{\phi} - 10\tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\psi} \right) \sqrt{\frac{\tilde{\phi}}{\pi}} - \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\tilde{\phi} - \frac{1}{2}\tilde{\phi}^2 - \tilde{\psi} \right) e^{\tilde{\phi}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\tilde{\phi}} \right) \right]. \quad (4.43)$$

O perfil das curvas de densidade de massa adimensional $\tilde{\rho}$ em função da distância radial \tilde{r} adimensional nas aproximações newtoniana e pós-newtoniana é representado graficamente na figura 4.3. Estas curvas são obtidas a partir das expressões matemáticas para a densidade de massa newtoniana e pós-newtoniana dadas pelas equações (4.42) e (4.43), respectivamente.

Figura 4.3: Densidade de massa $\tilde{\rho}$ como função da distância radial \tilde{r} . newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$; curva em azul $\zeta_0=10$.



A aproximação pós-newtoniana é uma função do parâmetro $\zeta_0 = mc^2/kT_0$, é a razão entre da energia no referencial em repouso das partículas do gás e a energia térmica do gás. A partir do gráfico obtido, podemos inferir que as contribuições de densidade de massa se tornam maiores no centro da configuração diminuindo o valor do parâmetro ζ_0 , ou seja, aumentando a temperatura do gás T_0 ⁷. Todas as densidades de massa tendem a zero para valores maiores da distância radial \tilde{r} . O resultado obtido aqui para as curvas de densidade apresentam comportamento oposto ao caso para o qual a função distribuição é caracterizada por uma função politrópica de energia [14]. Para a função politrópica de energia, a qual depende de um parâmetro n dependendo do valor escolhido para n as densidades são negativas. Como é esperado que as densidades sejam apenas positivas, na proposta feita nesta tese para a função distribuição de Maxwell-Jüttner para as aproximações newtoniana e pós-newtoniana nenhuma densidade de massa se torna negativa. Os resultados obtidos são diferentes devido ao fato das funções distribuições consideradas para a descrição do sistema serem diferentes. Além disso, vale mencionar que as soluções se tornam complexas para os potenciais gravitacionais com valores maiores que $\tilde{r} \approx 3.6$. O fato das soluções serem complexas a partir de um determinado valor do raio pode ser devido as normalizações e adimensionalizações feitas nas equações do modelo. Este problema da complexidade da solução para raios maiores é um dos problemas a serem devidamente pesquisados.

⁷Aqui, vale mencionar que os valores escolhidos para o parâmetro ζ_0 estão associados aos seguintes limites: $\zeta_0 \gg 1$ - limite não-relativístico, $\zeta_0 \ll 1$ - limite ultra-relativístico e $\zeta_0 \sim 1$ - limite relativístico.

Velocidade Circular

As correções da primeira aproximação pós-newtoniana associadas às curvas de rotação da velocidade circular são determinadas com base na equação da aceleração de uma partícula em queda livre obtida nos trabalhos [13,14]. Esta equação para campos estáticos é dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) + \frac{4\mathbf{v}}{c^2} \cdot \nabla \phi - \frac{v^2}{c^2} \nabla \phi. \quad (4.44)$$

A componente radial da equação (4.44) em coordenadas esféricas (r, θ, φ) para orbitas circulares de partículas no plano equatorial, onde $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, é dada por

$$r\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{r}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{4\phi}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.45)$$

A expressão para a velocidade circular é $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, em termos do potencial gravitacional. A partir da equação (4.44) acima, considerando os termos de ordem até $\frac{1}{c^2}$, temos

$$v_\varphi = \sqrt{r \frac{\partial \phi}{\partial r} \left(1 + \frac{4\phi}{c^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{r}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}}. \quad (4.46)$$

Note que a velocidade circular newtoniana é dada por: $v_\varphi = \sqrt{r \frac{\partial \phi}{\partial r}}$.

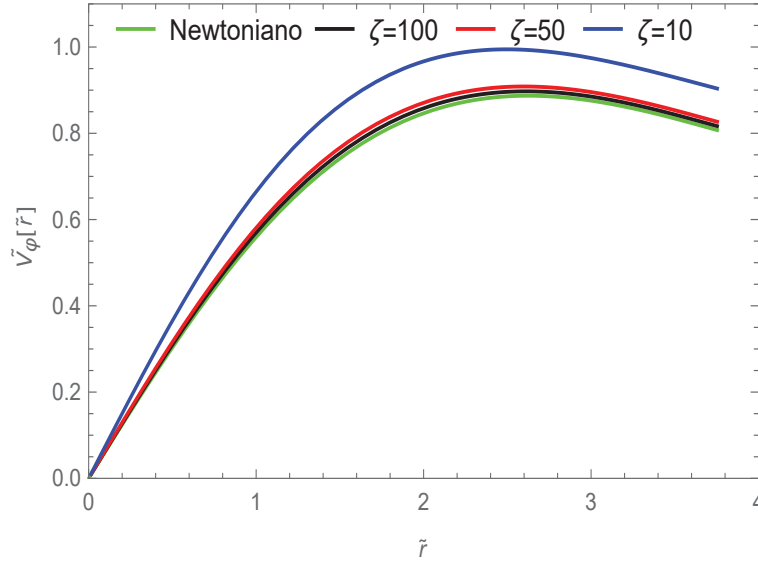
Agora, a velocidade circular escrita em termos de \tilde{r} , $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ definidas na equação (4.38) se torna

$$\tilde{v}_\varphi = \sqrt{\tilde{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{4\tilde{\phi}}{\zeta_0} + \frac{\tilde{r}}{\zeta_0} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}} - 1 \right) - \frac{\tilde{r}}{\zeta_0} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}}}, \quad (4.47)$$

onde $\tilde{v}_\varphi = v_\varphi \sqrt{m/kT_0}$ denota a velocidade circular adimensional.

A velocidade adimensional \tilde{v}_φ como função da coordenada radial adimensional \tilde{r} é representada graficamente na figura 4.4.

Figura 4.4: Velocidade circular \tilde{V}_φ em função da distância radial \tilde{r} . newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$; curva em azul $\zeta_0=10$.



A partir da figura 4.4 para os perfis da velocidade circular, podemos afirmar que as curvas apresentam o mesmo comportamento para ambas as aproximações: newtoniana e pós-newtoniana. Para a aproximação pós-newtoniana as velocidades circulares são maiores e apresentando o mesmo comportamento das curvas de densidade de massa. Este resultado qualitativamente falando é melhor comparado ao newtoniano pois as curvas teóricas para a velocidade circular são maiores do que as obtidas pela teoria newtoniana, uma vez que se tem como objetivo a comparação com os dados observacionais de curvas de rotação de galáxias. Ainda, os valores para a velocidade circular são maiores conforme valores do parâmetro ζ_0 diminuem, o que corresponde a valores mais altos da temperatura T_0 .

Uma análise foi feita para gases ideais no trabalho [14], ao comparar o comportamento apresentado para os perfis da velocidade circular. Os perfis da velocidade circular para o qual a função distribuição é caracterizada por uma função politrópica de energia [14] difere do comportamento das curvas obtidas nesta tese. Para o caso de gases ideais descrito por uma função politrópica de energia as curvas para a velocidade circular na primeira aproximação pós-newtoniana são sempre menores que a aproximação newtoniana. Nos resultados obtidos aqui, o comportamento apresentado é o oposto, ou seja, as curvas com correções pós-newtonianas são maiores que a apresentada pela newtoniana. Mais uma vez, esta diferença entre os resultados de [14] e os obtidos aqui se deve ao fato da descrição ser feita a partir de funções distribuições diferentes. Vale notar que os valores maiores para a velocidade circular na primeira aproximação pós-newtoniana são devidos ao fato que o aumento da temperatura do gás, aumenta na velocidade térmica das partículas do gás $\sqrt{kT_0/m}$.

Energia Potencial Gravitacional

Outra grandeza física que analisamos foi a energia potencial gravitacional de uma partícula do gás. A expressão matemática para a energia potencial gravitacional pode ser obtida a partir da expressão para a energia de uma partícula (3.42) considerando-se $\mathbf{v} = 0$. Escrevendo a energia potencial gravitacional em termos das quantidades adimensionais definidas em (4.38) temos que as energias potenciais gravitacionais newtoniana \tilde{U}_N e pós-newtoniana \tilde{U}_{PN} são

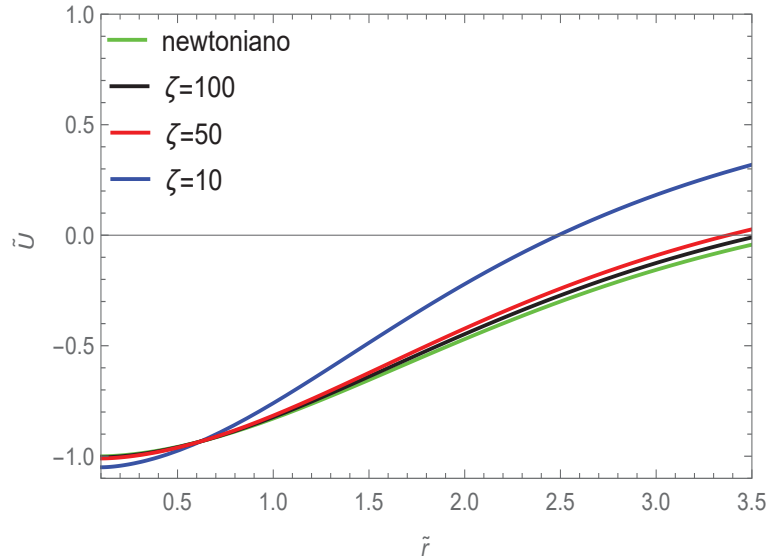
$$\tilde{U} = \frac{U}{kT_0} = \tilde{U}_N + \tilde{U}_{PN}, \quad (4.48)$$

onde

$$\tilde{U}_N = -\tilde{\phi}, \quad \tilde{U}_{PN} = \frac{1}{\zeta_0} \left(\frac{\tilde{\phi}^2}{2} - \tilde{\psi} \right). \quad (4.49)$$

A figura 4.5 é uma representação gráfica da energia potencial gravitacional adimensional \tilde{U} em função da distância radial adimensional \tilde{r} .

Figura 4.5: Energia potencial gravitacional \tilde{U} em função da distância radial \tilde{r} . newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$; curva em azul $\zeta_0=10$.



Pela análise das curvas do gráfico mostrado na figura 4.5 podemos inferir que a energia potencial gravitacional newtoniana é sempre negativa para os valores considerados. Já as energias potenciais gravitacionais pós-newtonianas mudam de sinal para valores maiores

da distância radial a partir do centro da configuração. A temperatura do gás na aproximação pós-newtoniana é representada pelo termo $\tilde{\phi}^2/2\zeta_0$, que determina a mudança de sinal da energia potencial gravitacional. A energia potencial gravitacional neste caso, tem o mesmo comportamento na primeira aproximação pós-newtoniana que o resultado obtido no caso da função politrópica de energia para a função distribuição [14] para o índice politrópico $n = 3$. Novamente, as soluções se tornam completas para valores do raio maiores que $r = 3.5$ o que possivelmente ocorre devido as normalizações e adimensionalizações do modelo. Sendo assim, uma nova análise deverá ser feita para sabermos qual o comportamento da energia potencial para valores maiores do raio. Além disso, devemos estudar uma proposta de análise para estas soluções além deste raio crítico.

Pressão

A última grandeza física que analisamos foi o da pressão do gás. A expressão para a pressão pode ser obtida a partir da equação do tensor energia-momento dada em (4.32), através da expressão $p = -T^{ii}/3$. Escrevendo a equação para a pressão em termos das quantidades adimensionais, temos

$$\tilde{p} = \frac{mp}{k\rho_0 T_0} = e^{\tilde{\phi}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\tilde{\phi}} \right) - \left(2 - \frac{4}{3}\tilde{\phi} \right) \sqrt{\frac{\tilde{\phi}}{\pi}}. \quad (4.50)$$

A pressão apresenta o mesmo comportamento obtido para a densidade de massa, no qual os valores máximos ocorrem no centro da configuração e tendem a zero para valores maiores da distância radial. Já para a aproximação 1PN, nota-se que a pressão não tem contribuição, a qual depende do fator $1/\zeta_0$. Vale a pena mencionar que estas contribuições irão aparecer somente na ordem de ${}^4T^{ii}$.

A pressão adimensional \tilde{p} como função da coordenada radial adimensional \tilde{r} é representada graficamente na figura 4.6.

Além disso, o comportamento da razão $\tilde{p}/\tilde{\rho}$ em termos das coordenadas radiais adimensionais é mostrado na figura 4.7.

Figura 4.6: Pressão \tilde{p} em função da distância radial \tilde{r} .

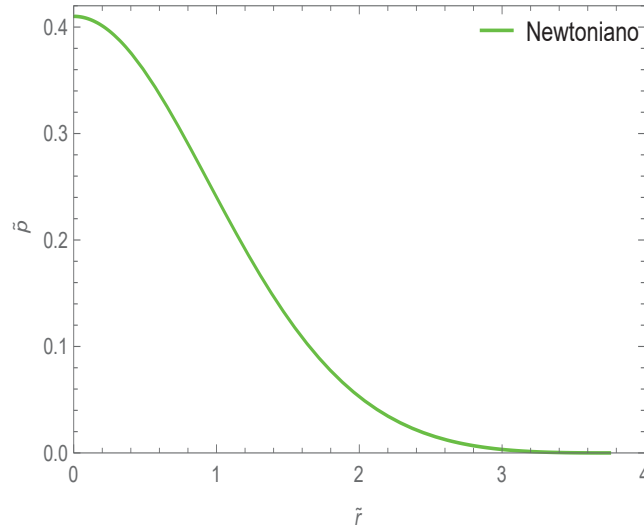
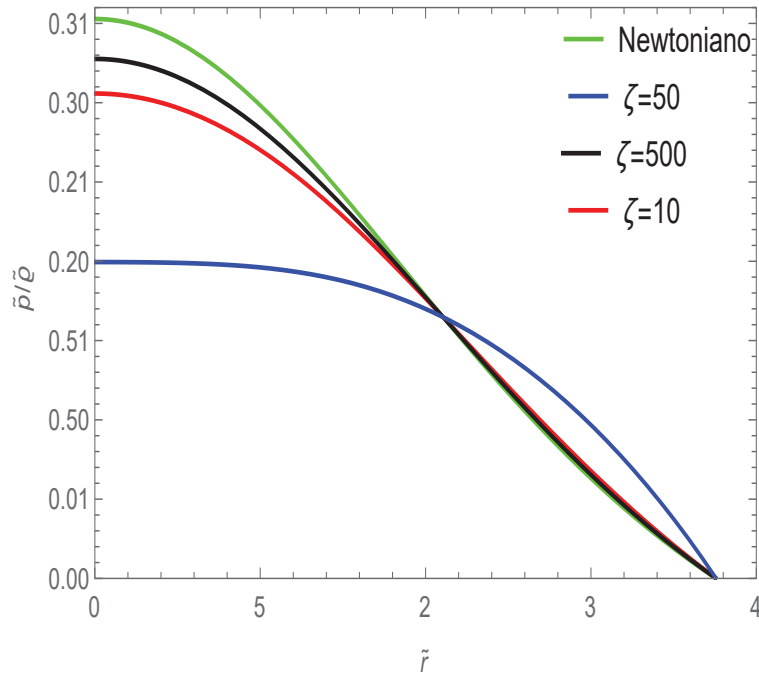


Figura 4.7: Pressão $\tilde{p}/\tilde{\rho}$ em função da distância radial \tilde{r} .



Ainda, é válido o questionamento sobre a influência das condições de contorno no comportamento dos campos analisados. No que se refere a isto, obtivemos que as condições de contorno que apresentam maior influência sob as soluções que se referem ao potencial gravitacional newtoniano $\tilde{\phi}$ em $\tilde{r} = 0$. Contudo, considerando valores de $\tilde{\phi}(0)$ no intervalo $[0.5, 3]$ o comportamento das curvas não mudam, somente os valores absolutos dos campos

se tornam menores ou maiores que os obtidos para $\tilde{\phi}(0) = 1$. Para raios pequenos, $\tilde{p}/\tilde{\rho}$ tende a um valor constante enquanto que tende a zero conforme o raio \tilde{r} aumenta. Como comentário final, é válido mencionar que os valores arbitrários escolhidos para o parâmetro ζ_0 podem ser escolhidos uma vez que levamos em conta o limite relativístico para a escolha destes valores, ou seja, não se tem valores $\zeta_0 \ll 1$, por exemplo.

4.3 ESTRUTURA DO MODELO PROPOSTO

A motivação para a construção de um modelo de curvas de rotação de galáxias, como já mencionamos, está relacionado a um dos desafios atuais da astrofísica que é considerarmos a massa gravitacional de grandes estruturas tais como galáxias. Na literatura, é bem sabido que as curvas de rotação de galáxias não seguem o perfil newtoniano, isto indica que a Gravitação newtoniana não é a teoria mais apropriada para descrevermos totalmente a distribuição de massa de tais estruturas [50].

Uma maneira de explicarmos esta incompatibilidade entre as curvas de rotação observacionais e teóricas é introduzir uma componente desconhecida com pressão zero, a qual é chamada de matéria escura. Esta componente hipotética não pode ser observada ou medida diretamente, mas pode ser detectada através de seus efeitos gravitacionais em ambientes próximos (galáxias). Isto significa, como já mencionamos anteriormente que a matéria escura não interage diretamente com a matéria padrão, ou seja, não interage com a matéria contida no modelo padrão de partículas [5]. Na literatura atual, existem muitos modelos de partículas semelhantes para a matéria escura. No entanto, nenhum deles parece válido para descrever apropriadamente a matéria escura completamente em escalas cosmológicas. Sendo assim, a única informação física consistente que se tem sobre a matéria escura é como ela interage gravitacionalmente com a matéria padrão.

Nesta tese, foram escolhidas as galáxias do tipo espirais para o estudo das curvas de rotação. Esta escolha se deve aos seguintes fatos: galáxias espirais existem em maior quantidade no Universo, e possuem mais dados observacionais disponíveis na literatura. Além de serem o tipo de galáxia mais estudado.

A estrutura de uma galáxia espiral é bem conhecida na literatura como foi visto anteriormente. A estrutura de uma galáxia espiral possui os seguintes constituintes: gás, disco estelar, bojo e halo de matéria escura [50,54]. O modelo teórico usualmente proposto na literatura atual, descreve a velocidade circular de rotação total de uma galáxia espiral como a soma de cada um dos constituintes mencionados. Portanto, seguindo esta idéia temos que a velocidade circular total, é escrita da seguinte maneira

$$V^2(r) = V_D^2(r) + V_G^2(r) + V_{DM}^2(r) + V_{bojo}^2(r), \quad (4.51)$$

onde $V_G^2(r)$, V_D^2 e $V_{DM}^2(r)$, são as velocidades associadas ao gás, disco estelar e halo de matéria escura, respectivamente. Além disso a expressão da velocidade circular total ser representada matematicamente pelo quadrado da velocidade V^2 é uma notação. As velocidades aqui estão sendo analisadas para o referencial fixo no centro da galáxia, ou seja, em relação ao bojo.

Para alguns modelos propostos na literatura [60,61], a contribuição do bojo é consi-

derada nula, $V_{bojo}^2(r) = 0$. Logo, a expressão da velocidade total, é dada por

$$V^2(r) = V_D^2(r) + V_G^2(r) + V_{DM}^2(r). \quad (4.52)$$

Nesta tese, será feita a descrição das componentes da galáxia espiral, separadamente. Primeiramente será feita a descrição para o disco estelar, seguida da descrição para o halo de matéria escura, e por fim para o gás.

Para a descrição do disco estelar, utilizaremos o modelo teórico apresentado em [20]. Esta proposta de modelo para o disco estelar será apresentada em detalhe neste capítulo. Para a construção deste modelo utilizamos do método da Aproximação pós-newtoniana (1PN) [6] juntamente com conceitos advindos da Teoria Cinética de Gases Relativistas [18], como visto nas seções iniciais deste Capítulo. É importante lembrar que este modelo foi obtido utilizando-se dos primeiros princípios da termodinâmica e da teoria cinética relativista, tendo como resultado as mesmas equações para o tensor energia-momento, densidade, pressão e equações de Poisson, por exemplo, obtidos pela Relatividade Geral [6]. Mas, neste trabalho todas estas expressões foram obtidas de uma maneira alternativa.

Para o halo de matéria escura e para o gás, utilizamos a descrição proposta no artigo [61]. No modelo do artigo mencionado, consideraram-se dois perfis de densidade para a descrição do halo de matéria escura, o perfil de Burkert [21, 62] e o perfil de Navarro, Frank e White (NFW) [63]. Nesta tese, por uma questão de simplicidade, o halo de matéria escura é descrito utilizando-se apenas o perfil de densidade de Burkert. As próximas duas seções deste capítulo apresentam de maneira mais detalhada, a descrição teórica relacionada às contribuições do disco estelar e da matéria escura usadas no modelo proposto nesta tese.

4.3.1 Disco Estelar na aproximação pós-newtoniana

Até agora, o foco deste capítulo esteve sobre características básicas de sistemas autogravitantes de gases ideais na primeira aproximação pós-newtoniana. Agora, devido à sua relevância física na astrofísica moderna em níveis teóricos e observacionais, nossa atenção será dedicada às curvas de rotação circular. Em particular, será analisada a correspondência entre duas soluções em um raio crítico, chamado \tilde{r}_c . Como mencionado anteriormente, a idéia por trás de tal procedimento padrão é reproduzir as bem conhecidas características observacionais de curvas de rotação de galáxias. Nesta seção, mostraremos como estas curvas foram obtidas levando em conta as correções pós-newtonianas.

A primeira componente da estrutura de uma galáxia espiral apresentada é o disco estelar (matéria luminosa). Basicamente, o disco estelar é formado de estrelas, gás e poeira que orbitam em torno da região central deste objeto. Nota-se que uma fração considerável da massa de uma galáxia é concentrada no disco [54]. As curvas de rotação obtidas nesta tese, descrevem a contribuição do disco estelar de uma galáxia espiral utilizando-se do formalismo pós-newtoniano. Na sequência, apresentaremos como tais curvas foram obtidas.

A massa na região interna do raio ($M(< r)$) de uma galáxia é relacionada com a velo-

cidade de rotação circular V através da seguinte expressão advinda da teoria newtoniana:

$$M(< r) = \frac{rV^2}{G}, \quad (4.53)$$

onde V é a velocidade numa órbita circular de raio r e G a constante da Gravitação de Newton.

Na figura 4.4, para a velocidade circular é mostrado que o modelo proposto descreve bem a região, a qual chamamos de região interna correspondente a $\tilde{r} \leq \tilde{r}_c$. Isto, porque a curva de rotação circular cresce linearmente com a distância radial. Porém, a curva não se torna bem-definida para $\tilde{r} > \tilde{r}_c + \epsilon$ com $\epsilon > 0$, isso implica que os potenciais gravitacionais tornam-se complexos e, portanto as soluções não são físicas. Uma das possíveis explicações para a complexidade da solução para regiões maiores do raio pode ser atribuída as adimensionalizações e normalizações do modelo, ou ainda, não podemos descartar um problema de origem numérica. No entanto, este é um dos problemas em aberto do modelo a ser estudado resolvido futuramente.

Uma idéia para contornar o problema da complexidade da solução para raios maiores e com o objetivo de apresentarmos uma solução para este problema, combinamos tais soluções com outros dois potenciais gravitacionais escolhidos apropriadamente. Os potenciais gravitacionais escolhidos são,

$$\tilde{\phi}_2(\tilde{r}) \quad e \quad \tilde{\psi}_2(\tilde{r}). \quad (4.54)$$

Aqui, é natural fazermos a seguinte pergunta: quais os tipos de equações físicas devem satisfazer estes novos potenciais? Uma resposta adequada poderia ser que estes potenciais satisfaçam a equação de Laplace. Ou seja,

$$\nabla^2 \tilde{\phi}_2(\tilde{r}) = 0 \quad e \quad \nabla^2 \tilde{\psi}_2(\tilde{r}) = 0. \quad (4.55)$$

Além disso, devemos assegurar que os potenciais e suas derivadas primeiras sejam contínuas em \tilde{r}_c , para que se tenha uma condição de contorno bem definida.

Análise desta proposta em detalhes: considerando que ambos os potenciais gravitacionais satisfazem a equação de Laplace, podemos supor que tais potenciais são da seguinte forma,

$$\tilde{\phi}_2(\tilde{r}) = \frac{\alpha}{\tilde{r}} + \beta \quad e \quad \tilde{\psi}_2(\tilde{r}) = \frac{\gamma}{\tilde{r}} + \delta. \quad (4.56)$$

Ao impormos a condição de continuidade para os potenciais e suas derivadas, resolvemos o sistema de equações, e com isso temos

$$\tilde{\alpha} = -\tilde{\phi}_1(\tilde{r}_c) \quad e \quad \tilde{\beta} = \tilde{\phi}_1(\tilde{r}_c) + \tilde{r}_c \tilde{\phi}_1'(\tilde{r}_c). \quad (4.57)$$

É relevante mencionar que o mesmo ocorre para o outro potencial, apenas realizando a seguinte troca: $\alpha \rightarrow \gamma$, $\beta \rightarrow \delta$, juntamente com $\tilde{\phi}_1 \rightarrow \tilde{\psi}_1$, onde $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{\psi}_1$ são potenciais gravitacionais que satisfazem as equações de Poisson (4.36)-(4.37) na região interna ($\tilde{r} \leq \tilde{r}_c$).

Esta proposta nos permite estender a solução física além do raio crítico \tilde{r}_c . Além disso, ao substituirmos os potenciais $\tilde{\phi}_2(\tilde{r})$ e $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ em (3.42) verificamos que a curva de rotação circular tende a zero no limite em que os valores do raio aumentam. Com isso, é mostrado que os potenciais gravitacionais propostos não reproduzem a propriedade esperada para a curva de rotação circular na região externa.

Com o intuito de resolver esta nova questão, sugerimos outros dois tipos de potenciais. Portanto, são propostos o potencial $\tilde{\phi}_2(\tilde{r})$ que satisfaz a equação de Laplace, enquanto que $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ segue a equação de Poisson. A escolha destes potenciais é feita simplesmente porque nos permite reproduzir o comportamento esperado para as curvas para valores grandes do raio. Considerando as mesmas condições de contorno já mencionadas temos que o potencial $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ é dado por

$$\tilde{\psi}_2(\tilde{r}) = \gamma \frac{e^{-k\tilde{r}}}{\tilde{r}} + \delta \ln \tilde{r}. \quad (4.58)$$

Aqui, k é o parâmetro de Yukawa, e γ , δ são constantes de integração. O potencial $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ é obtido pela solução do seguinte sistema,

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_2(\tilde{r}_c) = \gamma \frac{e^{-k\tilde{r}_c}}{\tilde{r}_c} + \delta \ln \tilde{r}_c \\ \tilde{\psi}_2'(\tilde{r}_c) = -k\gamma \frac{e^{-k\tilde{r}_c}}{\tilde{r}_c} - \gamma \frac{e^{-k\tilde{r}_c^2}}{\tilde{r}_c} + \delta \frac{1}{\tilde{r}_c} \end{cases} \quad (4.59)$$

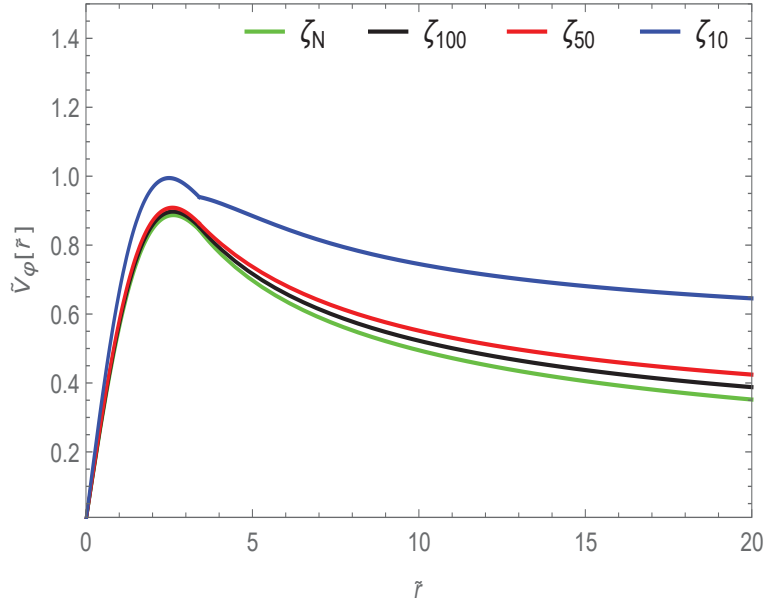
Para determinarmos os valores das constantes de integração, foi usado: $\tilde{\psi}_2(\tilde{r}_c) = \tilde{\psi}_1(\tilde{r}_c)$ e $\tilde{\psi}_2'(\tilde{r}_c) = \tilde{\psi}_1'(\tilde{r}_c)$. O sistema é solucionado numericamente, com isso é encontrado que para $\tilde{r}_c = 3.4001$ temos $\gamma \simeq -29.7253$ e $\delta \simeq -2.6906$. Devemos salientar que o procedimento acima descrito não depende dos valores assumidos por ζ_0 , no entanto, a curva de rotação circular depende.

A figura 4.8, representa as curvas de rotação circular para grandes valores do raio \tilde{r} e diferentes valores de ζ_0 .

É possível observarmos, a partir do gráfico da figura 4.8 que a sugestão proposta reproduz o perfil plano esperado para o potencial de Coulomb $\tilde{\phi}_2(\tilde{r})$, juntamente com $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ na equação (3.42). Os termos de Coulomb e Yukawa desaparecem para grandes valores do raio, mas a contribuição logarítmica introduz uma constante na velocidade circular a qual é dominante para valores maiores de \tilde{r} . Desta maneira, é incluído o potencial coulombiano em $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$ ao invés de um termo de Yukawa e isso também nos leva a uma curva suave. Além disso, o termo de Yukawa é melhor porque apresenta um comportamento mais suave comparado ao potencial de Coulomb para grandes valores do raio \tilde{r} .

Aqui, é importante mencionar as considerações físicas dos resultados obtidos nesta proposta. Para $\tilde{r} \leq \tilde{r}_c$, a densidade newtoniana é dada por: $\tilde{\rho} = -\nabla^2 \tilde{\phi}_2 = \alpha/\tilde{r}^2$, a

Figura 4.8: Curvas de velocidade de rotação circular em função da distância radial \tilde{r} .



qual claramente tende a zero para valores grande de \tilde{r} . Nesta região, a densidade pós-newtoniana e a pressão são curvas fornecidas somente por $\tilde{\psi}_2(\tilde{r})$, isto é, $\tilde{\rho}_{PN} + \tilde{p}_{PN} = -\nabla^2 \tilde{\psi}_2 = -\gamma e^{-\tilde{r}}/\tilde{r} - \delta/\tilde{r}^2$, onde é escolhido $k = 1$ sem perda de generalidade. Portanto, $\tilde{\rho}_{PN} + \tilde{p}_{PN}$ também tende a zero neste limite. Note que, $\tilde{\rho}_{PN} + \tilde{p}_{PN}$ são sempre positivos, pois $\gamma < 0$ e $\delta < 0$.

Portanto, com a obtenção das curvas da figura 4.8, é alcançado o objetivo de estender a situação física além do raio crítico. Com isto, é mostrado que as curvas de rotação com perfil suave podem ser obtidas pelo método da aproximação pós-newtoniana, a partir da função distribuição de Maxwell-Jüttner em 1PN e resolvendo os correspondentes potenciais gravitacionais também nesta aproximação. Como comentário final, deve-se observar que nesta aproximação, a função distribuição usada neste modelo difere substancialmente do perfil politrópico explorado em [14]. Em relação às mudanças introduzidas por estas soluções, obteve-se que o potencial coulombiano leva a lei de potência do inverso do quadrado para densidade newtoniana, como era esperado. Contudo, é possível separar a densidade pós-newtoniana a partir da pressão pós-newtoniana, então encontra-se que $\tilde{\rho}_{PN} + \tilde{p}_{PN} = -\gamma e^{-\tilde{r}}/\tilde{r} - \delta/\tilde{r}^2$, o qual leva a uma quantidade positiva e tende a zero para valores grandes do raio.

No modelo para galáxias espirais apresentado nesta tese, o disco estelar da galáxia é descrito pelas curvas de rotação da figura 4.8. A proposta é válida, pois estas curvas apresentam o comportamento dos perfis das curvas esperados para a descrição do disco estelar.

4.3.2 Halo de Matéria Escura

O halo de matéria escura, como já foi visto, é outra componente da estrutura de uma galáxia espiral. Esta componente é a maior componente em tamanho e massa, provavelmente composta de partículas elementares que interagem fracamente, e que ainda não foram detectadas. Daí o nome, matéria escura. Para a maioria das propostas, o halo de matéria escura interage com as demais componentes apenas gravitacionalmente [6,54], da mesma forma que é considerado nesta tese. Vale mencionar que, a proposta para descrição do halo de matéria escura desta tese são resultados obtidos na literatura [21,63].

Para a descrição do halo de matéria escura, definiu-se a contribuição da velocidade da seguinte forma,

$$V_{DM}^2(r) = \frac{GM_{DM}}{r}. \quad (4.60)$$

A massa associada à matéria escura é definida a partir da seguinte integral,

$$M_{DM}(r) = \int \rho_{DM} dV = \int \rho_{DM} A dR, \quad (4.61)$$

onde o elemento de volume $dV = 4\pi R^2 dR$, lembrando que para o modelo considera-se simetria esférica.

Com isso, a massa é definida por

$$M_{DM}(r) = \int_0^r 4\pi \rho_{DM} R^2 dR, \quad (4.62)$$

onde ρ_{DM} representa o perfil de densidade de matéria escura, a ser escolhido apropriadamente.

A descrição para o halo de matéria escura foi obtida em [21], para a qual halo de matéria escura é modelado para o perfil de densidade de Burkert [21,62]. A distribuição de densidade relativa (densidade de Burkert) é definida por

$$\rho_{burkert} = \frac{\rho_0 r_c^3}{(r + r_c)(r^2 + r_c^2)}, \quad (4.63)$$

onde ρ_0 é a densidade central e r_c é o raio central ². Aqui, vale mencionar que este perfil de distribuição de densidade é empírico.

Agora, substituindo a equação (4.63) em (4.62), a massa associada a matéria escura

²Para o modelo desta tese os valores utilizados são os mesmos obtidos numericamente em [61] $\rho_0 = 3.19g/cm^3$ e $r_c = 17.7$ kpc

para o perfil de Burkert é dada por

$$M_{DM}(r) = 4\pi\rho_0 r_c^3 \left[-\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{r}{r_c}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{r}{r_c}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right) \right]. \quad (4.64)$$

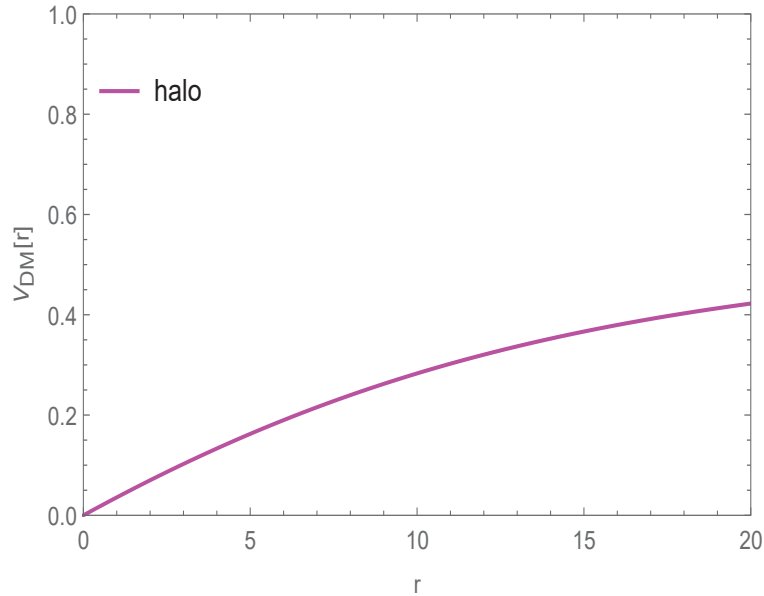
Substituindo (4.64) em (4.60), é obtida a expressão para a velocidade circular associada a matéria escura $V_{DM}^2(r)$:

$$V_{DM}^2(r) = 2\pi G \frac{\rho_0 r_c^3}{r} \left[\arctan\left(\frac{r}{r_c}\right) + \ln\left(1 + \frac{r}{r_c}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right) \right]. \quad (4.65)$$

A equação (4.64) é solução da integral para o perfil de densidade de Burkert. A curva de rotação para o halo de matéria escura obtido em [61, 64] está representada na figura 4.9.

A curva do gráfico da figura 4.9 representa o comportamento da matéria escura para o perfil de densidade escolhido para descrevermos esta componente do modelo. Como já mencionado anteriormente, o perfil usado para esta descrição é o perfil de densidade de Burkert.

Figura 4.9: Velocidade do halo de matéria escura para o perfil de Burkert.



4.4 COMPARAÇÃO DAS CURVAS OBSERVACIONAIS E TEÓRICAS

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos para as curvas de rotação do modelo teórico pós-newtoniano desenvolvido nesta tese. E posteriormente, a comparação destes resultados com os dados observacionais de galáxias espirais.

Primeiramente, construímos os gráficos das curvas associadas ao disco estelar em 1PN, a partir da solução apresentada na subseção 4.3.1. Na sequência, apresentamos as curvas de componente da galáxia separadamente, ou seja, as curvas para o disco estelar, para o halo de matéria escura e para o gás. Por fim, a soma das três contribuições: disco estelar, halo de matéria escura e gás.

As curvas de rotação do modelo proposto para o disco estelar e o halo de matéria escura são descritos conforme apresentado em [20,61], respectivamente. As curvas teóricas foram comparadas aos dados observacionais para um conjunto de 9 galáxias espirais. O objetivo desta comparação é verificar qual a relevância das contribuições pós-newtonianas associadas às curvas de rotação. Vale lembrar que as contribuições pós-newtonianas estão associadas apenas à descrição do disco estelar.

Os critérios de escolha para conjunto de galáxias deste trabalho, foram o perfil da velocidade de rotação apresentado pelos dados observacionais e a disponibilidade dos respectivos dados na literatura. Para as galáxias NGC 3198, NGC 2841, NGC 2903, NGC 7331, NGC 3521, NGC 5055 e NGC 2403, os dados foram obtidos principalmente de [60,65,66].⁷ Os dados das galáxias M31 e M33 foram retirados de [67,68], respectivamente. Por uma questão de simplicidade, a nossa discussão será apresentada detalhadamente para a galáxia NGC 3198. A mesma metodologia foi usada para a descrição de todas as galáxias apresentadas nesta tese. Portanto, para os demais casos apresentados serão discutidas apenas as considerações relevantes. Ainda, vale a pena mencionar que serão citadas para cada uma das galáxias informações quanto a sua morfologia, valores aproximados de massa e raio, tendo em vista uma análise do modelo proposto aqui.

4.4.1 NGC 3198

Aqui, será apresentada a discussão sobre a comparação dos dados observacionais referentes a galáxia espiral NGC 3198 às curvas de rotação do modelo proposto.

Dados observacionais NGC 3198

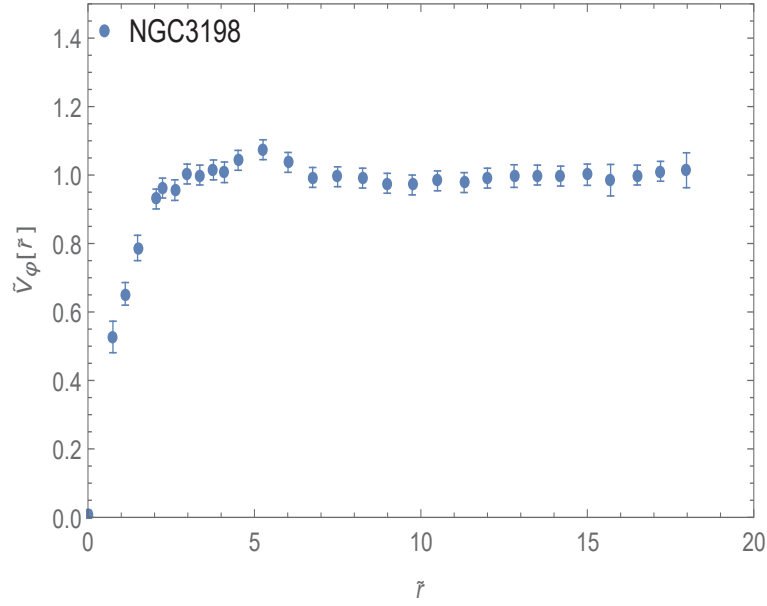
A galáxia NGC 3198 é uma galáxia classificada como espiral com morfologia do tipo SCc⁸. As curvas de rotação para os dados da galáxia NGC 3198 foram publicadas por vários autores [69–75]. Nos trabalhos de [74,75] encontra-se uma boa representação dos dados observados para esta galáxia. Além disso, dados observacionais referentes a galáxia NGC 3198, em particular, estão disponíveis em [60,61,76], e foram obtidos do quadro de pesquisa HALOGAS [77].

Os dados observacionais da velocidade circular versus o raio normalizados da galáxia NGC 3198, estão representados graficamente na figura 4.10.

⁷Dados disponíveis em <http://www.mpia.de/THINGS/Data.html>

⁸todas as classificações morfológicas das galáxias estão em <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>

Figura 4.10: Dados observacionais da NGC 3198 normalizados [76].

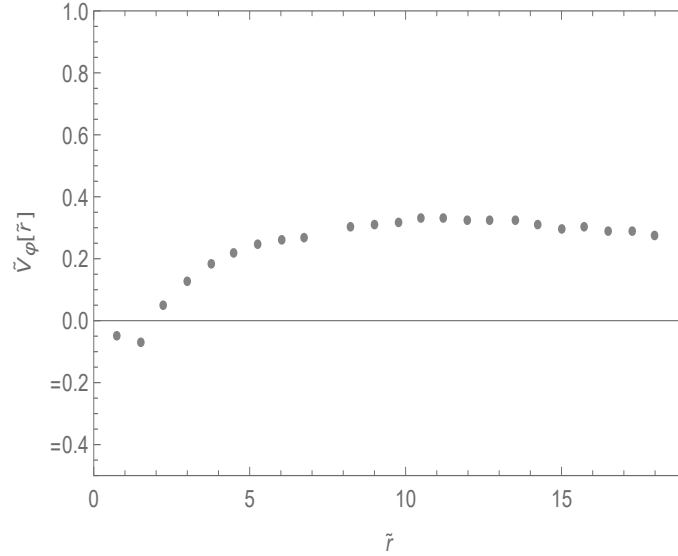


Nesta tese, foram utilizados os dados observacionais disponíveis em [61, 76] para a galáxia NGC 3198. Na figura 4.10, os dados observacionais foram normalizados conforme a proposta de normalização apresentada em [62, 64, 78, 79]⁹. No decorrer do trabalho, esta normalização será apresentada em mais detalhes.

Na figura 4.11, estão representados graficamente os dados referentes ao gás da galáxia NGC 3198.

⁹Para a normalização dos dados, e posteriormente das demais curvas de rotação apresentadas nesta tese, é feito o quociente da velocidade observada pela velocidade máxima, ou seja, velocidade máxima é a velocidade na qual a curva de rotação se torna suave. Vale notar que os valores máximos para a normalização são diferentes para cada galáxia.

Figura 4.11: Dados observacionais do gás da galáxia NGC 3198 normalizados.

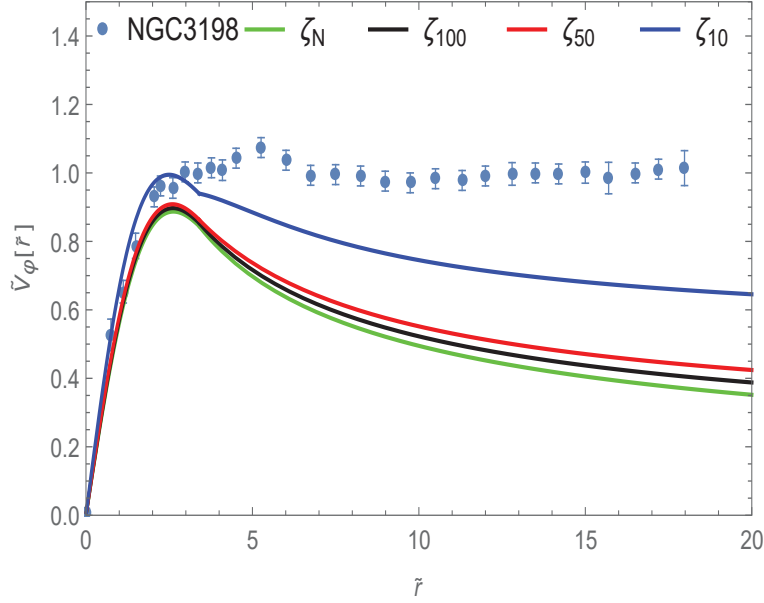


Aqui, é importante mencionar que o perfil associado aos dados da contribuição do gás para todas as galáxias apresentadas nesta tese é praticamente o mesmo [80]. Os dados associados a contribuição do gás foram ajustados com ajuste não-linear com uma função de ajuste logarítmica $a \ln r^2$, onde a é aproximadamente 0,038. A escolha deste ajuste foi feita levando em conta uma melhor descrição para os valores maiores do raio. É relevante notar que para todas as galáxias foi utilizada deste ajuste, sem perda de generalidade, uma vez que os dados referentes ao gás para as galáxias desta tese apresentam o mesmo perfil e praticamente os mesmos valores numéricos [80]. Vale notar que para algumas galáxias os dados da velocidade do gás pode apresentar valores negativos, isso ocorre quando na região interna a distribuição do gás tem uma significativa depressão central e a matéria da região externa tem um campo gravitacional forte maior que na região interna [81]. Por fim, vale a pena salientar que a contribuição associada ao gás de uma galáxia tem papel relevante na obtenção da curva total da velocidade de rotação.

Comparação entre as Curvas Rotação da galáxia NGC 3198

A comparação entre as curvas teóricas nas aproximações newtoniana e pós-newtoniana com os dados observacionais da galáxia NGC3198 está representada graficamente pela figura 4.12, na qual os pontos com barras de erro em vermelho são os dados observacionais, a curva em verde corresponde a curva newtoniana, e as curvas preta, vermelha e azul às pós-newtonianas.

Figura 4.12: Comparação curvas teóricas 1PN e dados observacionais. newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$; curva em azul $\zeta_0=10$ [76].



Para que esta comparação pudesse ser feita, foi necessário normalizar os dados referentes a velocidade circular de rotação e ao raio da galáxia ¹⁰. Esta normalização consiste, basicamente em: para a velocidade obter o quociente da velocidade circular observada pela velocidade máxima (velocidade a qual a curva de rotação da galáxia considerada permanece suave), e para o raio o quociente do raio medido pelo fator de escala h ¹¹ do disco estelar. No trabalho sobre disco de galáxias [82], por exemplo, foram estudados previamente a estrutura e as propriedades gerais dos discos estelares, nos quais são mostradas que a distribuição radial do brilho da superfície nos discos de galáxias frontais ou inclinadas podem ser aproximadas por um exponencial: $I(R) \approx e^{-\frac{R}{h}}$, onde h é o fator de escala mencionado. Fisicamente falando, o comprimento da escala exponencial de um disco de galáxias é um dos parâmetros fundamentais para determinar sua morfologia, estrutura e dinâmica. O comprimento de escala determina como as estrelas são distribuídas ao longo de um disco, e pode ser usado para obter sua distribuição em massa [83]. Ainda, vale notar que os valores de normalização são diferentes para cada uma das galáxias, como já citado anteriormente. A normalização dos dados observacionais é um procedimento usual na literatura, realizados em trabalhos como [62, 64, 78, 79].

A partir da figura 4.12, é possível inferir que as curvas associadas as contribuições 1PN estão "mais próximas" aos dados observacionais do que a curva newtoniana. Este é um ponto positivo para seguir esta análise, considerando o papel associado a tais contribuições.

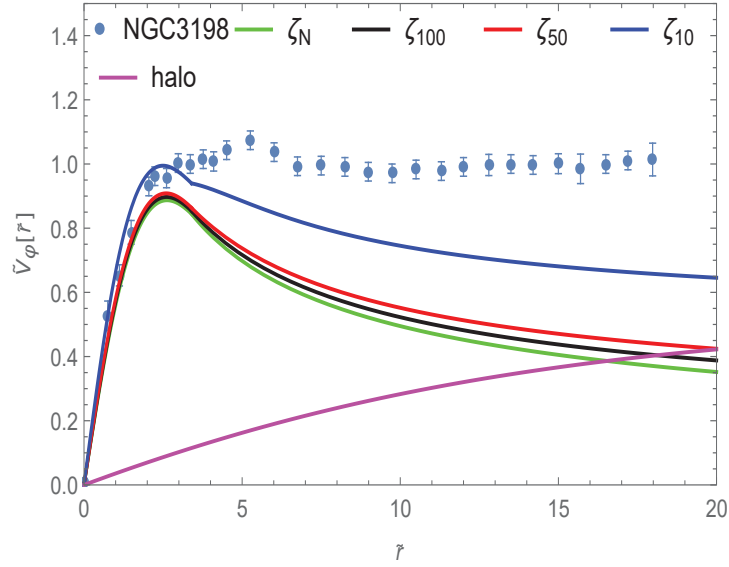
As curvas de rotação referentes ao disco estelar em 1PN, ao halo de matéria escura e aos dados observacionais da galáxia NGC 3198, estão representados graficamente, na

¹⁰Como já mencionado esta metodologia foi utilizada para a obtenção das curvas de rotação de todas as galáxias apresentadas nesta tese.

¹¹O fato de escala h é o comprimento de escala do disco estelar, em galáxias espirais varia de $2kpc$ a $4kpc$. Nos exemplos, estudados tese $h = 2kpc$.

figura 4.13.

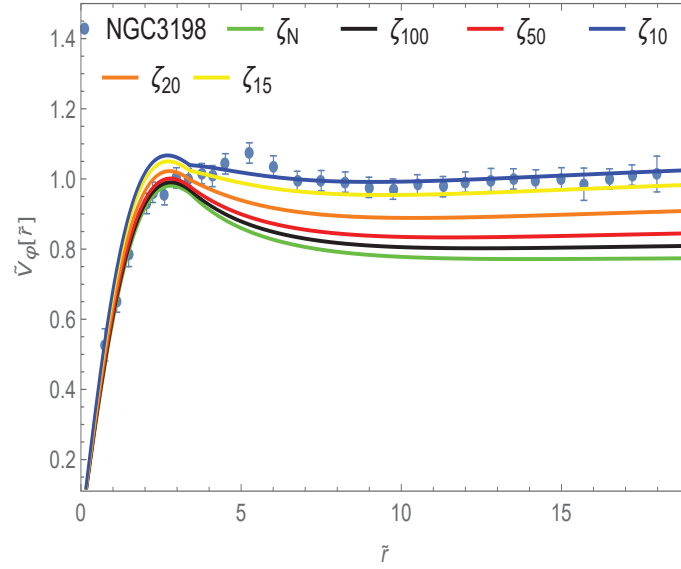
Figura 4.13: Curvas do disco estelar em 1PN, Halo de Matéria escura e dados observacionais. newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$; curva em azul $\zeta_0=10$; Halo de matéria escura: curva em magenta.



Na figura 4.13, foram representadas separadamente na mesma figura as curvas referentes ao disco estelar na aproximação pós-newtoniana, ao halo de matéria escura (curva em magenta) e aos dados observacionais para demonstrar o perfil do comportamento de cada uma das curvas associadas aos respectivos constituintes da galáxia, separadamente.

Na sequência, foram comparadas as curvas em 1PN somadas ao halo de matéria escura (descrito anteriormente) com os dados observacionais da galáxia NGC 3198 (4.14).

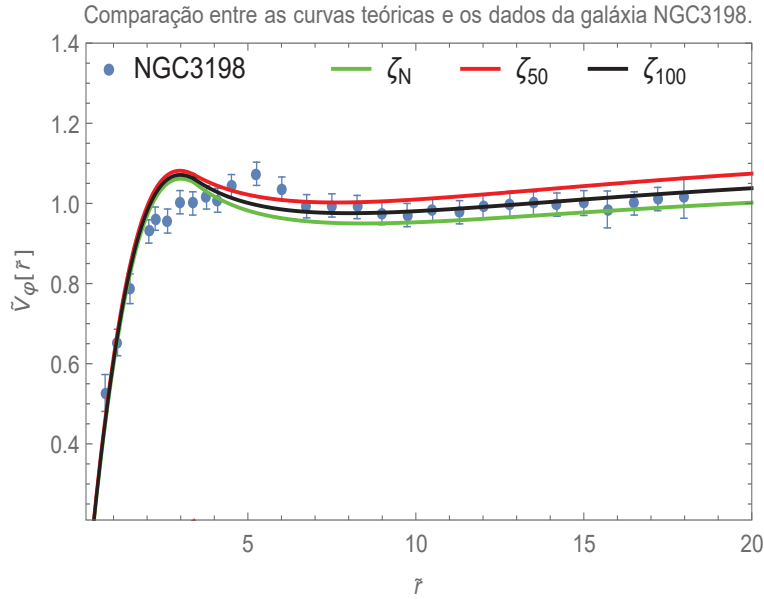
Figura 4.14: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo com os dados observacionais.newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$;curva em laranja $\zeta_0=20$; curva em amarelo $\zeta_0=15$; curva em azul $\zeta_0=10$.



Na figura 4.14, foi representado graficamente a contribuição 1PN somada a contribuição do halo de matéria escura para diferentes valores de ζ_0 . É possível concluir a partir deste gráfico que quanto menor os valores para o parâmetro ζ_0 , maiores são as contribuições associadas ao disco estelar. Além disso, como é bem estudado na literatura, ao serem adicionadas as contribuições: disco estelar mais halo de matéria escura as curvas de rotação se ajustam ainda melhor aos dados.

Por fim, as curvas de rotação representadas na figura 4.15 são o resultado da seguinte soma: disco estelar em 1PN + halo de matéria escura + gás.

Figura 4.15: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 3198.newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$.



Na figura 4.15, foram analisadas as curvas de rotação para três diferentes valores de ζ_0 , isto porque para o caso da galáxia NGC 3198, são as curvas que apresentam os melhores ajustes aos dados observacionais. Além disso, a partir destas curvas é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias. As seguintes considerações podem ser feitas aqui: conforme os valores do parâmetro ζ_0 diminuem, maiores são as contribuições associadas ao disco estelar, e por consequência, melhor é o ajuste da curva de rotação total aos dados. Uma vez que, a quantidade de matéria escura representada pela curva do rotação do halo é sempre a mesma os melhores ajustes das curvas totais se dão devido as contribuições pós-newtonianas acrescidas ao disco estelar. Os valores do parâmetro ζ_0 que melhores se ajustam aos dados observacionais diferem conforme a galáxia em estudo, isto está relacionado com o valor máximo para a qual a velocidade de rotação da galáxia em estudo se torna suave. O interessante aqui, é que foi possível verificar o papel relevante das contribuições pós-newtonianas associadas ao modelo proposto para as curvas de rotação. O percentual de erro relativo entre as curvas newtoniana e pós-newtoniana para $\zeta_0 = 100$ é de aproximadamente 6%, sendo este percentual o quanto a curva pós-newtoniana contribui a mais comparada a curva newtoniana.

4.5 CURVAS DE ROTAÇÃO PARA OUTRAS GALÁXIAS ESPIRAIS

Nesta seção, serão discutidos os resultados obtidos para as curvas de rotação em 1PN das demais galáxias do conjunto escolhido nesta tese. As galáxias (NGC 2841, NGC 5055, NGC 7331, NGC 2403, NGC 2903, NGC 3521 e NGC 3198) são 07 das 19 galáxias apresentadas em THINGS [65]. Além disso, foram acrescentadas ao conjunto as galáxias

M31 e M33 [67,68]. Mais detalhes sobre a obtenção dos dados observacionais do conjunto de galáxias e as curvas de rotação das mesmas (ver [60,65,67,68]). Aqui, os resultados serão apresentados para cada uma das galáxias, separadamente.¹²

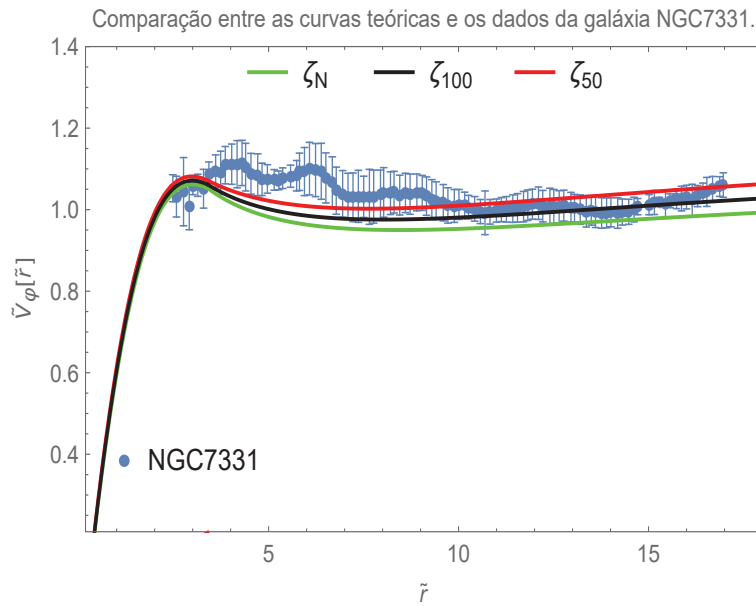
Galáxia Espiral NGC 7331

A galáxia NGC 7331 é uma espiral de SAb com braços espirais salientes. O gás HI¹³ é distribuído em um disco com uma depressão central. Esta galáxia é bastante semelhante a M31, sua orientação e escala são excelentes para o estudo da espectroscopia [84]. Foi anteriormente observada por [85], e sua curva de rotação também é estudada no trabalho [60].

No modelo de massa [65], a massa do bojo e do disco desta galáxia é $1.66 \times 10^{11} M_{\odot}$ e $1.74 \times 10^{10} M_{\odot}$, respectivamente. Usando a escala de distância do disco de $3.2 kpc$ [86]. De acordo com [65], a massa de gás HI é $0.91 \times 10^{10} M_{\odot}$. Isto é, aproximadamente 5% da massa do disco mais a do bojo. Os dados da velocidade de rotação THINGS para NGC 2841 estão disponíveis em distâncias até $24.4 kpc$, isto é quase 7 vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.16, são representadas graficamente as curvas de rotação téóricas para diferentes valores de ζ_0 juntamente com os dados observacionais da galáxia NGC 7331.

Figura 4.16: Comparação curvas téóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 7331.newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$.



Para esta galáxia, foram representadas as curvas de rotação para três diferentes valores de ζ_0 . A partir destas curvas, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas

¹²Vale lembrar que para todas as galáxias, os dados observacionais foram normalizados conforme mencionado anteriormente.

¹³O gás HI é encontrada na região da galáxia chamada de região HI, como já foi visto anteriormente

apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

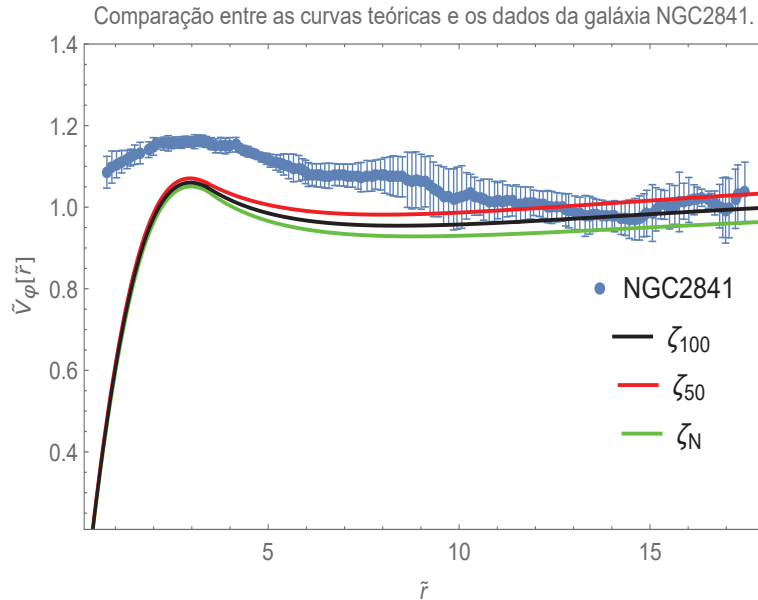
Galáxia Espiral NGC 2841

A galáxia espiral NGC 2841 é uma galáxia bem conhecida e está localizada na constelação do norte de Ursa Maior. Esta galáxia tem um diâmetro de mais de 150.000 anos-luz, sendo maior que a Via Láctea ¹⁴. A sua classificação quanto a morfologia é do tipo espiral SAa. É uma galáxia dominada por um bojo central saliente, e com um buraco central na sua distribuição de HI. A estrutura em espiral enrolada é também visível na parte interna da distribuição de HI. Nas partes externas, o disco é dominado por dois braços que parecem flexionar-se para fora do plano do disco interno [66].

No modelo de massa proposto em [65] é estimada que a massa do bojo e do disco desta galáxia seja de $1.096 \times 10^{11} M_{\odot}$ e $2.5 \times 10^{10} M_{\odot}$, respectivamente. Usando a escala de distância do disco de $3.5 kpc$ [86]. Ainda, de acordo com [65] a massa de gás HI é $8.6 \times 10^9 M_{\odot}$. Isto é, aproximadamente 6% da massa do disco mais a do bojo, e assim espera-se que haja apenas uma pequena contribuição para a densidade total no halo. Mais detalhes sobre a NGC 2841 em [60]. Os dados da velocidade de rotação THINGS para NGC 2841 estão disponíveis em distâncias até $51.6 kpc$, isto é quase 15 vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.17, é representado graficamente a comparação entre os dados observacionais da galáxia NGC 2841 e as curvas de rotação teóricas obtidas nesta tese.

Figura 4.17: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 2841.newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$.



¹⁴<https://apod.nasa.gov>

Na figura 4.17, foram representadas as curvas de rotação para três diferentes valores de ζ_0 . A partir destas curvas, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

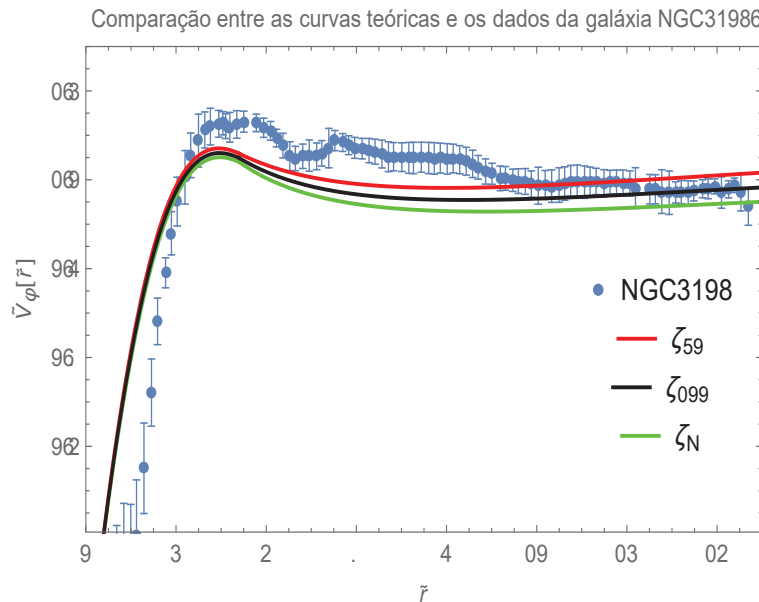
Galáxia Espiral NGC 2903

A galáxia espiral NGC 2903 está a 20 milhões de anos-luz distantes. Uma das galáxias mais brilhantes visíveis do hemisfério norte. A NGC 2903 exibe uma taxa excepcional de atividade de formação estelar perto de seu centro, também brilhante nas bandas de rádio, infravermelho, ultravioleta e de raios-x. Apenas um pouco menor do que a nossa Via Láctea, o NGC 2903 tem cerca de 80.000 anos-luz¹⁵. A sua morfologia é classificada como uma galáxia espiral SBbc.

A quantidade de massa do disco e do bojo da NGC 2903 é estimada em $1.41 \times 10^{10} M_\odot$ e $2.14 \times 10^9 M_\odot$, respectivamente [60]. A distância de escala do disco é de $3.0 kpc$ [86]. A massa de gás HI desta galáxia é de $4.35 \times 10^9 M_\odot$ [65], ou seja, é aproximadamente 27% da soma da massa do bojo mais do disco. Os dados de velocidade de rotação de THINGS desta galáxia estão disponíveis em distâncias de até $31 kpc$, que é mais de dez vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.18, são representadas graficamente as curvas de rotação téóricas para diferentes valores de ζ_0 juntamente com os dados observacionais da galáxia NGC 2903. Vale notar que as curvas apresentadas neste gráfico são a soma das contribuições: disco estelar + halo + gás.

Figura 4.18: Comparação curvas téóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 2903. newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0 = 50$.



¹⁵<https://apod.nasa.gov>

A partir destas curvas, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

Galáxia Espiral M31

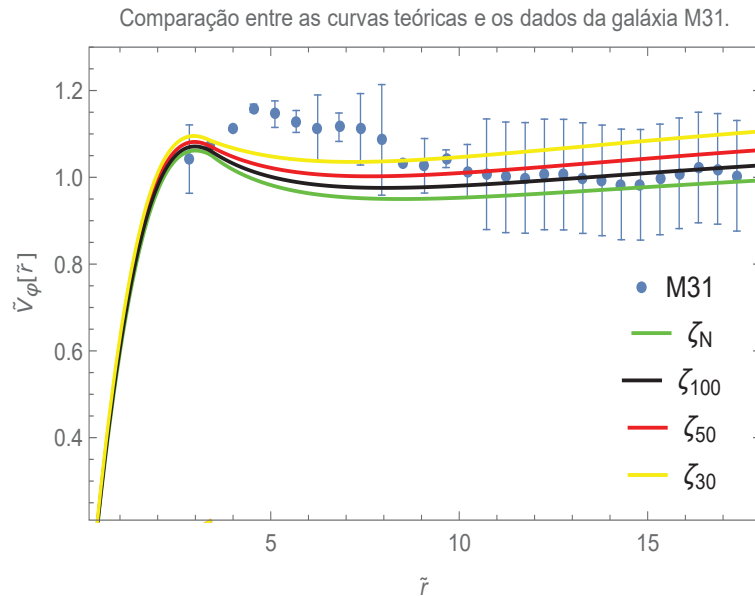
A galáxia M31, mais conhecida como Andrômeda, é a galáxia espiral mais próxima da Via Láctea. É a mais larga galáxia do Grupo Local, que inclui a Via Láctea, a galáxia do Triângulo e aproximadamente 30 outras galáxias menores. É uma galáxia duas vezes maior que a Via Láctea, inclusive com o dobro de quantidade de estrelas do que a nossa Galáxia, que tem aproximadamente meio trilhão de estrelas [87]. A sua morfologia é do tipo SAb.

Esta galáxia é uma galáxia rica em aglomerados globulares, satélites, regiões HII, e nebulosas planetárias. O disco HI da M31 é estendido, como descrito em [87–90], e sua cinemática foi estudada extensivamente há cerca de 30 anos em vários trabalhos [91–95].

Mais recentemente, as observações de HI da galáxia M31 foram obtidas com os telescópios Effelsberg e Green Bank 100 m, e permitiram medir a curva de rotação desta galáxia para $35kpc$. Entre 20 e $35kpc$, a curva de rotação é praticamente plana a uma velocidade de $226km/s$. Os dados observacionais da galáxia M31 estão disponíveis em [67].

Na figura 4.19, foram representadas graficamente as curvas referentes aos dados observacionais da M31 juntamente com as curvas teóricas para diferentes valores do parâmetro ζ_0 .

Figura 4.19: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais M31.newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$, curva em amarelo $\zeta_0 = 30$.



A partir do gráfico da figura 4.19, podemos concluir que as contribuições pós-newtonianas

apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

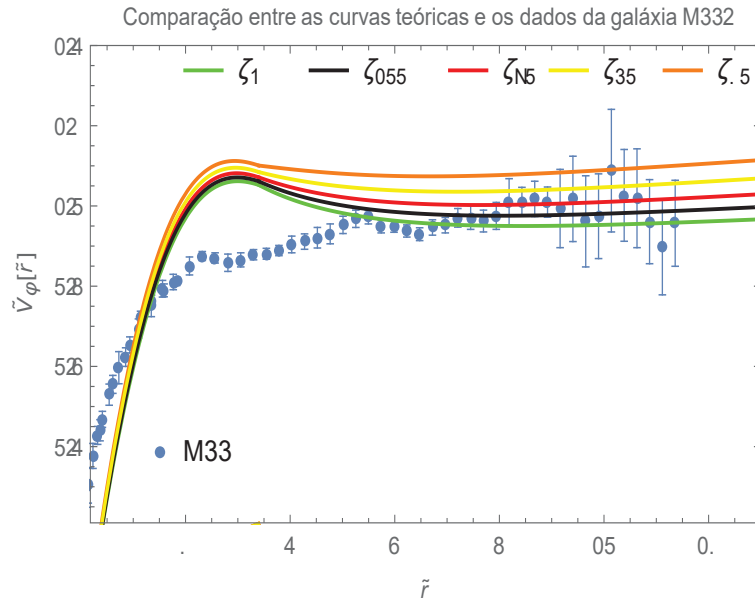
Galáxia Espiral M33

A galáxia M33 ¹⁶ é uma das galáxias mais próximas a nossa, e é um membro do grupo de galáxias local. Sua massa de 10 a 40 mil milhões de massas solares parece pequena em comparação com M31 e a Via Láctea. Mas, a M33 é a terceira maior do grupo local de galáxias. A galáxia M33 ao ser observada aparece azul devido a numerosas regiões formadoras de estrelas, misturadas com nebulosas regiões HII. É uma das maiores regiões HII conhecidas [96]. A morfologia desta galáxia é do tipo SAc.

Os dados observacionais desta galáxias estão disponíveis em [68]. Neste trabalho, foram determinadas a sua distribuição de massa de estrelas, gases e matéria escura da M33 para testar modelos cosmológicos de formação e evolução de galáxias e estudada as curvas de rotação newtonianas.

Na figura 4.20, foram comparados os dados observacionais da galáxia M33 com as curvas teóricas para diferentes valores do parâmetro ζ_0 .

Figura 4.20: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais M33.newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$, curva em amarelo $\zeta_0 = 30$, curva em laranja $\zeta_0 = 20$.



A partir da figura 4.20, pode-se inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

¹⁶Esta galáxia é o exemplo usado nesta tese para apresentar o problema da matéria escura.

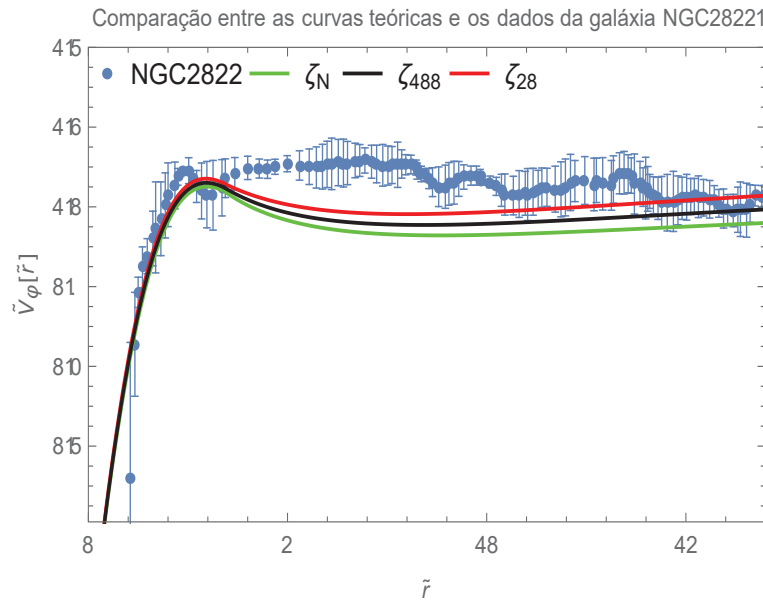
Galáxia Espiral NGC 5055

A galáxia NGC 5055 (M63), também conhecida como galáxia Girassol, possui apenas dois braços espirais que parecem estar se enrolando em seu núcleo amarelo. Os braços brilham com a radiação de estrelas azuis recentemente formadas e podem ser mais claramente vistos em observações infravermelhas. Galáxias espirais como esta, incentivam os astrônomos a obterem uma melhor compreensão de como as estrelas se formam em tais sistemas [96]. É uma galáxia espiral classificada como SAbc quanto a sua morfologia, apresentando um extenso e distorcido disco externo HI. Sua distribuição e cinemática foram recentemente analisadas por [60,97].

O modelo de massa [65] estima que a massa do bojo e do disco desta galáxia, é de $1.203 \times 10^{11} M_{\odot}$ e $2.09 \times 10^9 M_{\odot}$, respectivamente. Usando a escala de distância do disco de $3.622 kpc$ [86]. De acordo com [65], a massa de gás HI é $0.91 \times 10^9 M_{\odot}$. Isto é, aproximadamente 7% da massa do disco mais a do bojo. Os dados da velocidade de rotação THINGS para NGC 2841 estão disponíveis em distâncias até $44.4 kpc$, isto é 12 vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.21, foram comparados os dados observacionais da galáxia NGC 5055 com as curvas teóricas para diferentes valores do parâmetro ζ_0 .

Figura 4.21: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 5055.newtoniana: curva em verde;pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$, curva em amarelo $\zeta_0 = 30$, curva em laranja $\zeta_0 = 20$.



A partir da figura 4.21, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

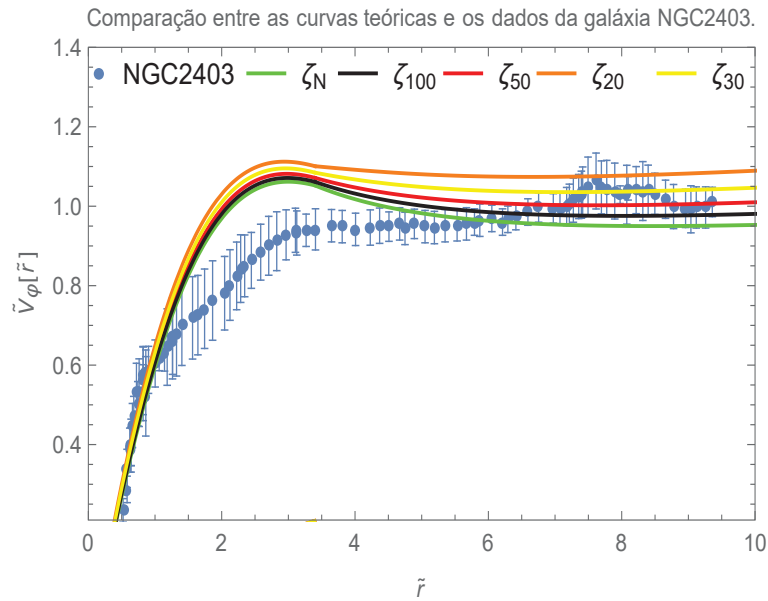
Galáxia Espiral NGC 2403

A NGC 2403 é uma galáxia do tipo SAcD, membro do grupo M81. A sua emissão de gás HI foi amplamente estudada em vários trabalhos na literatura, sendo suas observações mais recentes estudadas em [60, 98].

O modelo de massa [65] estima que a massa do bojo e do disco desta galáxia, é de $4.68 \times 10^9 M_\odot$ e $4.27 \times 10^8 M_\odot$, respectivamente. Usando a escala de distância do disco de $2.7 kpc$ [86]. De acordo com [65], a massa de gás HI é $2.58 \times 10^9 M_\odot$. Isto é, aproximadamente 50% da massa do disco mais a do bojo. Os dados da velocidade de rotação THINGS para NGC 2841 estão disponíveis em distâncias até $24 kpc$, isto é 12 vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.22, foram comparados os dados observacionais da galáxia NGC 2403 com as curvas teóricas para diferentes valores do parâmetro ζ_0 .

Figura 4.22: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 2403.newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0=50$, curva em amarelo $\zeta_0 = 30$, curva em laranja $\zeta_0 = 20$.



A partir do gráfico da figura 4.22, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

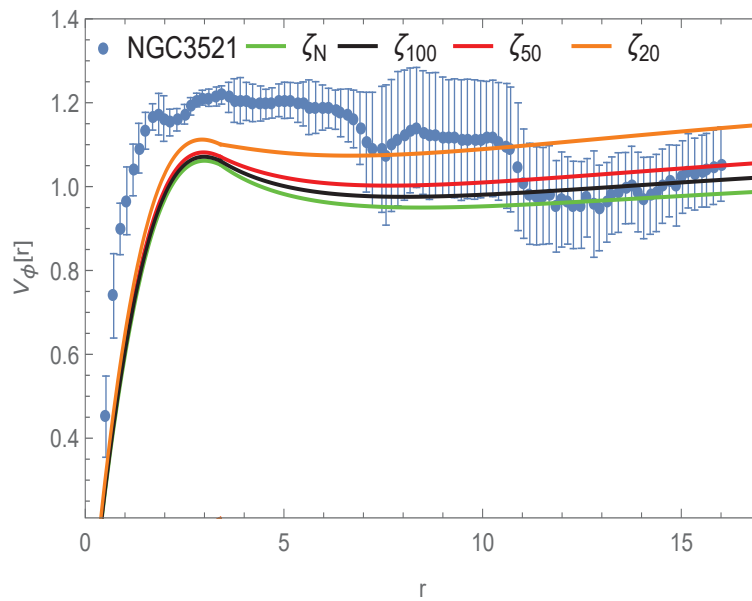
Galáxia Espiral NGC 3521

A galáxia NGC 3521 é uma galáxia SAab com braços espirais finos e muito enrolados, semelhante a galáxia NGC 5055. As características mais distintivas da galáxia NGC 3521 são os seus longos braços espirais salpicados de regiões de formação estelar intercaladas com poeira. Os braços são bastante irregulares, tornando a NGC 3521 num exemplo

típico de uma galáxia espiral granular. O modelo de massa [65] estima que a massa do disco é de $1.23 \times 10^{11} M_{\odot}$, com a massa do bojo desprezível. Usando a escala de distância do disco de $3.3 kpc$ [86]. De acordo com [65], a massa de gás HI é $0.802 \times 10^{10} M_{\odot}$. Isto é, aproximadamente 35.5% da massa do disco. Os dados da velocidade de rotação THINGS para NGC 2841 estão disponíveis em distâncias até $44.4 kpc$, isto é 12 vezes a escala de distância do disco.

Na figura 4.23, foram comparados os dados observacionais da galáxia NGC 3521 com as curvas teóricas para diferentes valores do parâmetro ζ_0 .

Figura 4.23: Comparação curvas teóricas 1PN+Halo+Gás com Dados Observacionais NGC 3521. newtoniana: curva em verde; pós-newtoniana: curva em preto $\zeta_0 = 100$; curva em vermelho $\zeta_0 = 50$, curva em amarelo $\zeta_0 = 30$, curva em laranja $\zeta_0 = 20$.



A partir da figura 4.23, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas apresentam contribuições relevantes às curvas de rotação de galáxias, no entanto, não se apresentam um ajuste que represente bem os dados observacionais.

4.6 CONSIDERAÇÕES DO CAPÍTULO

Neste capítulo, a construção do modelo astrofísico proposto foi baseada na função distribuição de Maxwell-Jüttner dentro das estruturas da Relatividade Geral. Tal equação foi descrita usando o formalismo pós-newtoniano. Para a obtenção desta expressão matemática, foi resolvida a integral da velocidade peculiar sobre o espaço tridimensional, para a qual foram levados em conta apenas os termos de primeira ordem. A partir da função distribuição, foi obtida a forma geral para a densidade nas aproximações newtoniana e pós-newtoniana. Os termos da pressão que são considerados no tensor energia-momento foram obtidos utilizando-se das integrais Gaussianas (ver Apêndice A). Isto, permitiu de-

monstrar que a expressão geral coincide com a reportada por Weinberg [6], validando o procedimento adotado.

Como um exemplo de aplicação do procedimento desenvolvido nesta tese, foi considerado o caso do quadri-fluxo de partículas e calculado as suas componentes temporais e espaciais. Uma vez que, a expressão para a densidade de energia e os termos da pressão na primeira aproximação pós-newtoniana foram obtidas, procurou-se pela solução estática e pela análise das condições de contorno do problema. Com isto, foram obtidos os perfis da densidade de energia, pressão e dos potenciais gravitacionais em termos de uma coordenada radial, através da solução numérica das equações de campo. Em particular, foi determinada que a densidade de energia tende a zero para valores grandes do raio, mas se aproxima de um valor constante próximo a origem. Além disso, este valor se torna maior para valores menores do parâmetro ζ_0 , como apresentado na figura 4.3. É interessante mencionar que este resultado é contrário ao caso obtido pela distribuição politrópica estudado em [14], pois a densidade de energia permanece sempre positiva em 1PN. Como parte do processo de avaliação dos perfis da velocidade circular, foi obtido que as curvas pós-newtonianas, alcançam valores maiores em relação as curvas do caso newtoniano. Para ambos os casos, foi encontrado que estas curvas exibem um comportamento linear próximo ao centro e então passam a ter um pico, como pode-se observar na figura 4.4. É interessante mencionar, que o comportamento da velocidade circular para gases ideais determinado aqui, difere do caso obtido para a função distribuição caracterizada por uma função politrópica de energia [14]. No último caso, os valores da velocidade circular na aproximação 1PN são menores que a os correspondentes na aproximação newtoniana. Nos resultados obtidos aqui, os valores maiores da velocidade circular na aproximação 1PN são devido ao fato de que com o aumento da temperatura do gás, a velocidade térmica das partículas do gás também aumenta.

Ainda, foi analisado o comportamento da energia potencial gravitacional adimensionalmente. Então, foi determinado que a energia potencial gravitacional newtoniana é sempre negativa, enquanto que as energias potenciais gravitacionais pós-newtonianas mudam de sinal para grandes valores da distância radial, a partir do centro da configuração. O termo que apresenta a temperatura do gás na aproximação pós-newtoniana determina a mudança de sinal da energia potencial gravitacional. O comportamento da energia potencial gravitacional, é o mesmo comportamento que ocorre para o caso da energia para uma função politrópica para uma função distribuição, no caso do índice politrópico $n = 3$. Em adição, outro o perfil determinado foi o perfil paramétrico da equação de estado $p(\rho)$ em termos da coordenada radial adimensional. Para pequenos valores do raio a densidade-pressão é praticamente constante; conforme aumenta a constante ζ_0 os valores alcançam valores maiores ou equivalentemente a energia térmica do gás ideal diminui consideravelmente. Esta situação é revertida conforme o raio aumenta. A primeira solução encontrada para a velocidade circular vai até um valor definido de raio, e a partir deste valor se torna complexo, não apresentando uma solução física. Com o intuito de ter um problema de condições de contorno bem definido, foram correlacionados dois diferentes tipos de potenciais gravitacionais em um raio crítico, chamado r_c , devido aos potenciais se tornarem complexos depois deste raio. A motivação física em trabalhar com este assunto foi a escolha de um potencial gravitacional para o qual o comportamento plano nas curvas de rotação para valores grandes do raio fosse reproduzido. As regiões linear e de pico,

foram descritas pelos potenciais obtidos a partir da integração numérica da densidade de energia e da pressão, advindas da função distribuição de Maxwell-Jüttner em 1PN. Com isso, foi possível mostrar que o primeiro potencial tem a forma de Coulomb enquanto que o outro apresenta dois tipos de termos, uma contribuição Yukawa e outra contribuição logaritmica. Em relação as mudanças introduzidas por estas soluções, foi obtido que o potencial coulombiano leva a lei de potência do inverso do quadrado para densidade newtoniana, como era esperado. Contudo, pode-se separar a densidade pós-newtoniana a partir da pressão 1PN, então encontrou-se que $\tilde{\rho}_{PN} + \tilde{p}_{PN} = -\gamma e^{-\tilde{r}}/\tilde{r} - \delta/\tilde{r}^2$, o qual leva a uma quantidade positiva e tende a zero para valores grandes do raio. É importante notar que o modelo teórico apresentado nesta tese é um resultado original que obtém as mesmas equações reportadas por Weinberg, a partir de princípios fundamentais da Mecânica Estatística. Esta maneira alternativa de construir um modelo puramente teórico que nos permitiu obter as mesmas expressões que as obtidas usando a Relatividade Geral.

Na sequência, foram adicionados novos componentes ao modelo proposto, ou seja, a descrição do disco estelar, feita pelo resultado das curvas de rotação obtidas nesta tese. Juntamente com a descrição do halo de matéria escura, para o qual foi utilizado um perfil de densidade usual na literatura, o perfil de densidade de Burkert [21]. Estas componentes foram adicionadas ao modelo a fim de se obter as curvas de rotação teóricas que melhor representassem os dados observacionais de uma galáxia espiral. Posteriormente, foi feita a comparação entre as curvas teóricas e os dados observacionais para alguns exemplos de galáxias espirais.

Finalmente, as seguintes considerações podem ser feitas destes resultados: primeiramente, que o modelo proposto aqui apresenta um percentual de 6% às curvas de rotação em na primeira aproximação pós-newtoniana comparadas à newtoniana. Com isto, pode-se concluir que as correções pós-newtonianas contribuem de forma relevante às curvas de rotação. Adicionalmente, com base na comparação entre curvas teóricas e os dados observacionais de 9 galáxias espirais, foi possível concluir de maneira qualitativa que o modelo proposto descreve bem dados observacionais de galáxias espirais mais jovens e com a morfologia do tipo SC, como por exemplo, a galáxia espiral NGC 3198. O modelo apresentado descreve bem às curvas de rotação de galáxias mais jovens, ou seja, quanto mais jovem a galáxia de acordo com a classificação de Hubble melhor a descrição apresentada pelo modelo proposto nesta tese. A morfologia da galáxia é um aspecto relevante na análise do modelo proposto, como já mencionado. Do conjunto de galáxias analisado nesta tese, foi possível notar que as galáxias do tipo SC apresentaram uma melhor descrição para o modelo proposto do que as galáxias de outras morfologias. Um outro aspecto avaliado qualitativamente, foi a quantidade de massa das galáxias estudadas, no entanto, para esta análise concluiu-se que a massa para todas as galáxias é aproximadamente a mesma e, portanto não tem relação com a descrição do modelo proposto aqui. Por fim, como foi possível inferir a partir das análises das galáxias apresentadas, a maioria delas não apresentou uma boa descrição para o modelo desta tese, ao menos para a análise qualitativa. No entanto, uma análise mais detalhada e quantitativa pode ser realizada com o objetivo de comparar os resultados apresentados aqui.

5 MODELO ESTELARES EM 1PN

Neste capítulo, primeiramente será apresentada uma breve descrição quanto a morfologia e as características de estruturas estelares, tais como estrelas de Nêutrons. Na sequência, será apresentada a equação de Lane-Emden na teoria newtoniana e, esta equação será utilizada para descrever o equilíbrio hidrostático de uma estrutura estelar. Além disso, serão apresentadas algumas equações referentes as grandezas físicas associadas às estruturas estelares: raio, massa, condensação central, pressão e temperatura. Por fim, serão apresentados os resultados obtidos no modelo estelar proposto nesta tese para estruturas estelares na aproximação pós-newtoniana.

5.1 BREVE DESCRIÇÃO DE ESTRELAS

Estrelas são esferas autogravitantes constituídas de gás ionizado, cuja fonte de energia é a transformação de elementos através de reações nucleares, basicamente através da fusão nuclear de hidrogênio em hélio e, posteriormente, em elementos mais pesados ¹. De maneira geral, as estrelas possuem massas entre 0,08 a 100 vezes a massa do Sol [55].

Uma idéia básica da evolução estelar está representada pela figura 5.1².

O processo de formação estelar se dá a partir de um gás rarefeito interestelar composto essencialmente de hidrogênio, com a mistura de alguns elementos mais pesados, como Carbono e Nitrogênio. Devido a interação gravitacional, surge a instabilidade gravitacional, que ao se tornar suficientemente grande causa a condensação da matéria difusa. A formação estelar (surgimento de uma estrela) é a primeira das etapas da evolução estelar, que é a sequência de ciclos e mudanças que ocorrem na vida de uma estrela. Estas etapas ocorrem de forma lenta e gradual e podem levar até bilhões de anos.

Uma estrela surge de nebulosas estelares, regiões são compostas por nuvens de gás, poeira e plasma, praticamente constituídas por hélio e hidrogênio [55]. Devido a interação gravitacional, as moléculas que constituem essas regiões são atraídas umas pelas outras até ficarem bem próximas, com isso contraem-se, fazendo com que a nebulosa diminua de tamanho. A contração gasosa, proporciona o aumento da temperatura. Quando a temperatura se torna alta o suficiente ocorre o processo de fusão nuclear, o qual libera alta quantidade de energia. Durante a fusão nuclear, os átomos de hidrogênio fundem-se, dando origem a elementos cada vez mais pesados. Conforme o hidrogênio é consumido, a temperatura aumenta e, a estrela passa pelo processo de expansão. Nesta fase, tem-se uma estrela Gigante ou Super-Gigante vermelha, dependendo da sua quantidade de massa. Posteriormente, a interação gravitacional prevalece e ocorre uma contração. Com

¹Exemplos, Carbono, Lítio, entre outros.

²Nota-se que as estruturas estelares da figura são apenas representativas, pois não estão na escala apropriada.

Figura 5.1: Evolução de estruturas estelares.



Fonte:

Livro Kepler Filho

isso, as partículas da superfície da estrela passam a ter velocidades altas em direção ao centro, quando se chocam com o núcleo e são ejetadas para o espaço, originando elementos mais pesados que o Ferro. Os gases que são liberados no espaço dão origem a uma nova nebulosa, da qual podem surgir novas estrelas. Na etapa de Gigante Vermelha, dependendo da quantidade de matéria, surgem uma nebulosa planetária ou uma Supernova. As Supernovas, também dependendo de sua massa, podem se transformar em: estrela de Nêutrons ou buraco negro. No caso de estrelas que só evoluem até a fase de gigante vermelha e, portanto formam as nebulosas planetárias, o núcleo se contrai e origina uma estrela pequena, densa e de baixa temperatura, chamada de Anã Branca.

Na sequência, será feita uma breve descrição da composição, morfologia e principais características das estrelas de Nêutrons e Anãs Brancas. A razão pela qual apenas estas estruturas são abordadas nesta tese, se deve ao fato de serem estruturas estelares de alta densidade. Além disso, por serem apenas estas estruturas a apresentarem contribuições pós-newtonianas relevantes em suas grandezas física para o modelo proposto.

Estrelas de Nêutrons

As estrelas de Nêutrons, são estruturas estelares basicamente formadas por Nêutrons. Estrelas de nêutrons são mantidas contra a pressão exercida pela força gravitacional de forma similar às anãs brancas, entretanto, ao invés dos elétrons estarem extremamente compactados, são os nêutrons, prótons e outros hádrons que exercem pressão contra o colapso gravitacional.

Como já foi mencionado, estas estrelas são estruturas resultantes do colapso gravitacional do núcleo de estrelas massivas, ou seja, estrelas que tem massa da ordem de

$10M_{\odot} - 29M_{\odot}$ [99]. O colapso gravitacional de estrelas de Nêutrons originam às supernovas. Porém, como a interação nuclear no interior das estrelas de Nêutrons é forte, e contrária a interação gravitacional, tal colapso não ocorre facilmente. O raio e a massa de uma estrela de Nêutrons são de aproximadamente $11 \times 10^3 m$ de comprimento e 1,1 a 3 vezes a massa solar [100]. A massa detectada observacionalmente é de aproximadamente $2,01M_{\odot}$ [101, 102]. A densidade estimada para este tipo de estrela varia entre $3,7 \times 10^{17} kg/m^3$ a $5,9 \times 10^{17} kg/m^3$ ³. A temperatura interna de uma estrela de Nêutrons recém-formada está em torno de $10^{11} K$ a $10^{12} K$. Entretanto, em poucos anos, a temperatura na superfície cai para $10^6 K$, devido ao grande número de neutrinos emitidos pela estrela. Mesmo nesta magnitude de temperatura, grande parte da luz gerada pela estrela está no espectro de raio X [99]. Para a construção de um modelo para a estrutura estelar de estrelas como esta, vale mencionar que as equações de estado para altas densidades não são precisamente conhecidas devido às suas dificuldades teóricas e empíricas. Neste caso, torna-se necessário considerar efeitos quânticos para uma melhor descrição. Além disso, é interessante mencionar que, geralmente estrelas de Nêutrons podem ser facilmente localizadas quando fazem parte de um sistema binário.

Anãs Brancas

Uma Anã Branca é um estágio remanescente de estrela com densidade alta, composta essencialmente por matéria degenerada. As Anãs Brancas constituem o estágio final da evolução para estrelas cuja as massas não são grandes o suficiente para tornarem-se estrelas de Nêutrons (Sol e grande parte das estrelas presentes na Via Láctea) [103].

As Anãs Brancas possuem fraca luminosidade, que é provida da emissão da energia térmica armazenada, pois esta estrela não tem a capacidade de realizar a fusão termonuclear. O resultado disso, é que a energia térmica não sustenta a estrela diante do colapso gravitacional. Neste caso, é a pressão de degenerescência dos elétrons que a sustenta. Essa degenerescência permite uma massa máxima para uma Anã Branca sem rotação, o limite de Chandrasekhar - aproximadamente $1,4M_{\odot}$, acima deste limite a pressão de degenerescência não é capaz de sustentar a estrela contra a ação gravitacional. Por não possuir uma fonte própria de energia, ao final da sua vida, a estrela passa a ter temperaturas baixas e se torna uma anã escura de baixa temperatura. O tempo necessário para que uma Anã Branca irradie toda sua energia é maior que a idade atual do Universo, portanto anãs escuras nunca foram observadas.

As massas estimadas para Anãs Brancas estão entre $0,17M_{\odot}$ e $1,33M_{\odot}$ embora a maioria delas possua massas entre $0,5M_{\odot}$ e $0,7M_{\odot}$ [104, 105]. Os raios estimados desta estrela estão entre $5,56 \times 10^6 m$ e $13,91 \times 10^6 m$ [106]. Uma Anã Branca típica tem densidade média entre $10^8 kg/m^3$ e $10^{12} kg/m^3$. Em densidades dessa ordem, de acordo com a Relatividade Geral, ocorre um redshift gravitacional da luz emitida pela estrela. Este fenômeno ocorre com a estrela Sirius B, por exemplo [107]. Essas densidades só são possíveis por que o material presente nas Anãs Brancas não é composto de átomos conectados por ligações químicas, mas por plasma de núcleos e elétrons não-ligados. Portanto, não há obstáculo para aproximar núcleos e elétrons, como há na matéria usual. Sabe-se também que o centro das Anãs Brancas mantêm uma temperatura entre $10^6 K$ a $10^7 K$ e estima-se

³a densidade pode variar de $10^9 kg/m^3$ a $10^{17} kg/m^3$ da superfície ao centro da estrela

que a pressão central seja da ordem de $10^{24} Pa$.

Outro fato interessante acerca destas estrelas, é terem baixas temperaturas e altas energias. Isto é devido ao Princípio de exclusão de Pauli, que diz que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado, logo estes devem obedecer a estatística de Fermi-Dirac. Portanto, na temperatura zero, nem todos os elétrons poderão ocupar o estado de energia mais baixo, alguns deles terão que ocupar estados de maior energia, formando uma banda de estados de mais baixa energia, o "mar de Fermi". Considerando este fato, é possível compreender que se ocorre uma compressão em uma Anã Branca, o número de elétrons em um dado volume aumenta, e de acordo com o Princípio de Exclusão de Pauli, isso aumenta da energia cinética dos elétrons, e conseqüentemente, um aumento da pressão interna. É essa pressão de degenerescência dos elétrons que sustenta a Anã Branca contra o colapso gravitacional. A existência de uma massa limite a qual Anãs Brancas não podem exceder (caso contrário se tornariam estrelas de Nêutrons) é outra consequência da pressão de degenerescência dos elétrons. O valor publicado por Chandrasekhar foi de $0,91M_{\odot}$ [108]. Para uma Anã Branca sem rotação, esse limite é aproximadamente igual a $5,7M_{\odot}/\mu_e$, onde μ_e é o peso molecular médio por elétron da estrela [109].

5.2 A EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN NA TEORIA NEWTONIANA

Considerando um sistema auto-gravitante, esfericamente simétrico e em equilíbrio, a equação de Lane-Emden na teoria newtoniana é obtida a partir das equações de Poisson e do equilíbrio hidrostático [34, 110], respectivamente apresentadas abaixo:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad (5.2)$$

onde $\rho(r)$ é a densidade de matéria, $p(r)$ é a pressão e $\phi(r)$ é o potencial gravitacional. Juntamente com a equação politrópica assumida, que é dada por

$$p = k\rho^{\gamma}, \quad (5.3)$$

onde k é a constante politrópica e γ é o expoente politrópico. Inserindo a equação (5.3) em (5.2), tem-se

$$\frac{d\phi}{dr} = \gamma k \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (5.4)$$

A integração da equação (5.4), para $\gamma \neq 1$ resulta em

$$\rho = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma k} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{\phi}{(n+1)k} \right]^n. \quad (5.5)$$

A constante de integração escolhida foi: $\phi = 0$ na superfície ($\rho = 0$). A constante n é conhecida como índice politrópico e é definida como $n = \frac{1}{\gamma-1}$. Inserindo (5.5) em (5.3) é obtida a expressão para a pressão,

$$p = \frac{\rho \phi}{(n+1)}. \quad (5.6)$$

Agora, substituindo (5.5) em (5.1), obtém-se a seguinte expressão,

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G \frac{\phi^n}{[(n+1)k]^n}. \quad (5.7)$$

Definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$z = \frac{r}{\xi}, \quad \omega(z) = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (5.8)$$

onde o índice c refere-se a centro da estrela e

$$\xi = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}. \quad (5.9)$$

Reescrevendo a equação (5.8) em termos das variáveis adimensionais definidas acima, tem-se

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\omega}{dz} - \omega^n = 0. \quad (5.10)$$

A equação (5.10) é a responsável pela descrição do equilíbrio hidrostático de estruturas estelares na teoria newtoniana. Esta equação é conhecida como equação de Lane-Emden.

Na astrofísica, a equação de Lane-Emden é utilizada para modelar estruturas de sistemas termodinâmicos descritos pela equação de estado de fluido politrópico que levam em conta apenas a influência da própria massa, ou seja, sistemas auto-gravitantes. Esta equação permite que sejam determinadas grandezas físicas do sistema como pressão, densidade e temperatura. A equação de Lane-Emden também pode ser obtida de maneira

equivalente, a partir da equação da conservação de massa e da equação de equilíbrio hidrostático [111]. A equação de Lane-Emden foi abordada nos trabalhos [112,113] nos quais foi obtida uma versão desta equação no contexto de teorias $f(R)$, que são um conjunto de teorias de gravitação modificada a fim de estender a relatividade geral de Einstein, explicando a aceleração progressiva do universo em expansão, sem a hipótese de matéria escura ou energia escura. Uma explicação básica sobre as teorias de gravitação $f(R)$, é que estas teorias tentam generalizar o lagrangeano de uma ação de Einstein-Hilbert escrevendo o escalar de Ricci (R) como uma função qualquer deste escalar.

5.3 MODELOS ESTELARES POLITRÓPICOS

O intuito de estudar as estruturas estelares é determinar as variações internas das principais propriedades físicas das estrelas, tais como a pressão, a densidade, e a temperatura em termos de parâmetros de entrada como a massa total ou a composição química. Para isso, é necessário conhecer os principais processos físicos que ocorrem nestas estruturas, assim como quantificar esses processos e obter um sistema de equações, cuja a solução obtenha as propriedades desejadas. Modelos bastante simplificados que permitem obter essas soluções analítica ou numericamente de maneira bastante simples são os modelos politrópicos.

Estes modelos estelares se baseiam na equação politrópica (5.3), apresentada anteriormente. Esta equação desempenha um papel importante nestes modelos, pois representa de maneira adequada o comportamento do gás estelar e consequentemente, soluciona o problema fundamental destas estruturas, juntamente com a equação de equilíbrio hidrostático. Tais soluções são chamadas de politrópicas.

A motivação pela qual a equação politrópica é usada no estudo de estruturas estelares, é justificada ao ser considerado que tais estruturas podem ser descritas a partir do comportamento de um gás ideal num processo adiabático. A generalização desse comportamento é dado pela equação politrópica. Esta descrição é relevante, uma vez que a convecção estabelecida no interior das estrelas corresponde a um gradiente de temperatura resultante de um gás adiabático em equilíbrio hidrostático. Outra motivação, a ser levada em conta é a natureza simples da estrutura politrópica e sua correspondência com classes de estrelas conhecidas. Tal simplicidade, fornece uma visão sobre a natureza dos efeitos que ocorrem realmente em estrelas [114].

5.3.1 Equação Politrópica

A equação politrópica pode ser obtida a partir da termodinâmica básica. Para isso, considera-se que as estruturas estelares são descritas por um gás ideal num processo adiabático.

Da primeira lei da termodinâmica, tem-se que a variação da energia na forma de calor dQ de um gás é relacionada com a variação da energia interna dU e a variação do trabalho realizado sobre o gás, por:

$$dQ = dU + pdV = \frac{dU}{dT}dT + pdV. \quad (5.11)$$

Sendo o calor específico c_β , dado por

$$c_\beta = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{\beta=\text{constante}}, \quad (5.12)$$

onde β é uma função das quantidades físicas, e é considerado constante. Com isso, é possível determinar lado direito da equação (5.12) usando a equação (5.11). Sendo assim, o calor específico c_V a volume constante é dado por:

$$c_V = \frac{dU}{dT}. \quad (5.13)$$

Considerando uma variação quasi-estática do gás, tem-se

$$dQ = c_V dT + p dV. \quad (5.14)$$

Um processo politrópico é um processo quasi-estático que ocorre a calor específico constante. Portanto, tem-se

$$\frac{dQ}{dT} = c = \text{constante}. \quad (5.15)$$

Com isso, pode-se afirmar que um processo adiabático é um processo politrópico com calor específico nulo, e um processo isotérmico também é um processo politrópico só que com capacidade térmica infinita. Uma variação quasi-estática, na qual a pressão e o volume são mantidos constantes são processos politrópicos com as quantidades c_p e c_V , respectivamente.

A partir das equações (5.14) e (5.15) para uma variação politrópica infinitesimal, a seguinte expressão é obtida

$$(c_V - c)dT + p dV = 0. \quad (5.16)$$

Agora, da lei dos gases ideais:

$$pV = RT, \quad (5.17)$$

onde V é o volume por unidade de massa e R é a constante do gases por unidade de massa, representada por

$$R = c_p - c_V. \quad (5.18)$$

Com as equações (5.17) e (5.18), reescreve-se a equação (5.16) como

$$(c_V - c) \frac{dT}{T} + (c_p - c_V) \frac{dV}{V} = 0. \quad (5.19)$$

Integrando a equação (5.19), obtém-se

$$T^{(c_V - c)} V^{(c_p - c_V)} = \text{constante}. \quad (5.20)$$

Neste estágio, define-se o expoente politrópico como:

$$\gamma = \frac{(c_p - c_V)}{(c_V - c)}, \quad (5.21)$$

ou ainda,

$$\gamma - 1 = \frac{(c_p - c_V)}{(c_V - c)}. \quad (5.22)$$

Então, a equação (5.20) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}. \quad (5.23)$$

Usando a equação de estado (5.17), é possível eliminar T da equação (5.23)

$$pV^\gamma = \text{constante}. \quad (5.24)$$

Da mesma forma, que é possível eliminar V através das equações (5.23) e (5.24)

$$p^{\gamma-1} T^\gamma = \text{constante}. \quad (5.25)$$

Considerando o plano (p, V) , os processos politrópicos com um dado expoente γ formam uma família de curvas paramétricas. Essas famílias de curvas tem cada uma destas curvas classificada a partir da "temperatura politrópica", que é definida como a temperatura ao longo de um dado politrópico no qual o volume específico V (logo, a densidade) tem valor unitário.

A temperatura politrópica é definida por Θ_γ :

$$TV^{\gamma-1} = \Theta_\gamma. \quad (5.26)$$

Com isso, se torna mais conveniente representar as variáveis físicas em função da temperatura politrópica. Desta forma, a densidade e o índice politrópico podem ser escritos da seguinte maneira

$$\rho = \lambda \Theta^n; \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}. \quad (5.27)$$

onde λ é um fator constante, n é o índice politrópico e ρ é a densidade.

A equação (5.26) relaciona a densidade e o volume específico, com isso pode-se escrever

$$T = \Theta_\gamma \rho^{\gamma-1}. \quad (5.28)$$

Finalmente, a equação politrópica que relaciona a pressão e a densidade pode ser obtida com as equações (5.17) e (5.28)

$$p = R \Theta_\gamma \rho^{\frac{n+1}{n}} = k \rho^{\frac{n+1}{n}}. \quad (5.29)$$

onde k é uma constante.

5.3.2 Soluções da equação de Lane-Emden

A equação de Lane-Emden na teoria newtoniana (5.10) possui soluções analíticas para os seguintes valores: $n = 0$, $n = 1$ e $n = 5$. Para outros valores de n , podem ser obtidas soluções numéricas. Os diferentes valores de n fornecem uma descrição para uma determinada classe de estrelas. Na sequência, alguns destes valores são listados:

- $n = 0$: a densidade de matéria como função do raio é constante, isto é, $\rho(r) = \rho_c$. Essa é a solução para uma esfera incompressível com densidade constante.
- $n = 1$: solução para estrelas de Nêutrons.
- $n = 1, 5$: solução mais aproximada para estrelas completamente convectivas: Gigantes Vermelhas e Anãs Marrom; ou ainda, para planetas como Júpiter (planeta gigante gasoso).
- $n = 3$: solução que representa a Aproximação de Eddington⁴. Não existe solução analítica para esse valor de n , no entanto é útil, pois corresponde a estrelas como o Sol e com núcleos degenerados como Anãs Brancas;
- $n = 5$: solução com raio infinito. Corresponde a um modelo simples de um sistema estelar auto-consistente.

⁴Fisicamente, o limite ou aproximação de Eddington representa a maior luminosidade que uma estrela com determinada massa pode ter e ainda assim, permanecer em equilíbrio hidrostático

- $n = \infty$: solução para uma esfera auto-gravitante isotérmica, cuja estrutura é idêntica a de um sistema de estrelas sem colisão, como aglomerados globulares.

Neste trabalho, serão analisadas as soluções apenas para $n = 1$ e $n = 3$ que são os valores de n que correspondem a solução da equação de Lane-Emden para estrelas de Nêutrons e Anãs Brancas, respectivamente.

5.4 A EQUAÇÃO DE LANE-EMDEN PÓS-NEWTONIANA

Para obter-se a equação de Lane-Emden em 1PN, primeiramente será retomado parte dos cálculos da equação de Boltzmann em 1PN. Em seguida, será apresentada a obtenção das equações de balanço em 1PN. E, por fim, a partir da equação de momento linear em 1PN será obtida a equação de Lane-Emden em 1PN.

5.4.1 Equação de Boltzmann na aproximação pós-newtoniana

Como mencionado no capítulo 2, a evolução no espaço-tempo da função distribuição $f(x, v, t)$ de uma partícula no espaço de fase formado pelas coordenadas x e as velocidades v das partículas, é dado pela equação de Boltzmann [7]. Esta expressão na primeira aproximação pós-newtoniana foi recentemente obtida no trabalho [14] e é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial v^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial v^i} + \left(\frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] + \frac{1}{c^2} \left[4v^i v^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \left(\frac{3v^2}{2} + 3\phi \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right. \\ \left. + 3v^i \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi}{\partial t} - v^j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial v^i} = Q(f, f), \quad (5.30) \end{aligned}$$

onde $Q(f, f)$ é o chamado operador colisão da equação de Boltzmann e $f(x, v, t)$ é a função distribuição de Maxwell-Jüttner na primeira aproximação pós-newtoniana obtida na seção 4.2.1 desta tese.

Por uma questão didática e de simplicidade, aqui será apresentado novamente parte dos cálculos demonstrados anteriormente no capítulo 3. Os potenciais gravitacionais ϕ , ψ e ξ^i em 1PN são dados em termos das equações de Poisson como foi visto em (3.22) [6],

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{4\pi G}{c^2} T_{00}, \\ \nabla^2 \psi &= 4\pi G ({}^2T_{00} + {}^2T_{ii}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \xi^i &= \frac{16\pi}{c} G {}^1T_{0i}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

juntamente com a condição harmônica que conecta os potenciais ϕ e ξ^i

$$4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0. \quad (5.32)$$

Como foi visto anteriormente, da teoria cinética dos gases relativistas o tensor energia-momento é dados em termos da função distribuição de uma partícula [18]. Retomando a equação (4.11)

$$T^{\mu\nu} = m^4 c \int u^\mu u^\nu f \frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-u_0} = m^4 c \int u^\mu u^\nu f \frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-(g_{00} u^0 + g_{0i} u^i)}, \quad (5.33)$$

onde $u^\mu = (u^0, u^0 v^i/c)$ é a quadri-velocidade das partículas do gás. Em 1PN a componente tempo da quadri-velocidade é dada pela seguinte equação,

$$u^0 = c \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} \right]. \quad (5.34)$$

A função distribuição no equilíbrio para um gás relativista na primeira aproximação pós-newtoniana, considerando-se apenas os termos de ordem até $1/c^2$, é dada por

$$f = \frac{n}{(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-m W^2}{2kT}} \left[1 - \frac{15kT}{8mc^2} - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3W^4}{8} - 2W^2\phi + \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W})^2}{2} + \frac{V^2 W^2}{2} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) W^2 \right) \right]. \quad (5.35)$$

Na equação (5.35) m é a massa em repouso da partícula, k é a constante de Boltzmann, n e T são a densidade número de partículas e a temperatura do gás respectivamente. Enquanto que, $\mathbf{W} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ é a velocidade peculiar, com V denotando a velocidade hidrodinâmica do gás. O elemento de integração invariante que aparece na definição do tensor energia momento (5.33), em 1PN é dado pela equação (4.15) [20]. Retomando,

$$\frac{\sqrt{-g} d^3 u}{-(g_{00} u^0 + g_{0i} u^i)} = \frac{4\pi}{u^0} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5(V^2 + 2(\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) + W^2)}{2} - 7\phi \right) \right] W^2 dW. \quad (5.36)$$

Em 1PN as aproximações para as componentes do tensor energia-momento são dadas inserindo (5.34)-(5.36) em (5.33) e integrando o resultado obtido, é:

$${}^0T^{00} + {}^2T^{00} = \rho c^2 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3kT}{2m} + V^2 - 2\phi \right) \right], \quad (5.37)$$

$${}^1T^{0i} + {}^3T^{0i} = \rho c \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3kT}{2m} + \frac{p}{\rho} + V^2 - 2\phi \right) \right] V^i, \quad (5.38)$$

$${}^2T^{ij} + {}^4T^{ij} = p \left[1 + \frac{2}{c^2} \phi \right] \delta^{ij} + \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3kT}{2m} + \frac{p}{\rho} + V^2 - 2\phi \right) \right] V^i V^j. \quad (5.39)$$

Aqui, $\rho = mn$ é a densidade de massa e $p = nkT$ é a pressão. Além disso, os dois primeiros termos no tensor energia-momento (5.37) se refere a energia por partícula

$$\epsilon = mc^2 + \frac{3}{2}kT. \quad (5.40)$$

O primeiro termo acima é a energia no referencial considerado em repouso enquanto que o segundo corresponde ao valor não-relativista da energia por partícula de uma gás monoatômico simples.

5.4.2 Equações de Balanço na Aproximação pós-newtoniana

Agora, multiplicando a equação (5.30) por uma função arbitrária do espaço-tempo e da velocidade $\chi(x, v, t)$ e integrando a equação resultante usando o elemento de integração invariante dado em (5.36), a versão 1PN da equação de transferência de Maxwell-Enskog [18] é obtida:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \chi \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5v^2}{2} - 7\phi \right) \right] f d^3v + \frac{\partial}{\partial x^i} \int \chi v^i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5v^2}{2} - 7\phi \right) \right] f d^3v \\ & - \frac{2}{c^2} \int \chi \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} v^i \right] f d^3v - \int \left[\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x^i} v^i \right] \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{5v^2}{2} - 7\phi \right) \right] f d^3v \\ & - \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \chi}{\partial v^i} \left[4v^i v^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + 3v^i \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial t} - v^j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \right) \right] f d^3v \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \int \frac{\partial \chi}{\partial v^i} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{7v^2}{2} - 3\phi \right) \right] f d^3v = \int \chi \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} [2v^2 - 6\phi] \right\} Q(f, f) d^3v. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Na obtenção da equação (5.41) acima, foi usado o teorema da divergência das velocidades no espaço das velocidades e, foi considerado que a função distribuição para uma superfície localizada muito distante (no infinito) no espaço de fase, se anula.

As equações de balanço são obtidas a partir da equação (5.41). Para isto, foi considerada a função distribuição de Maxwell-Jüttner dada pela equação (5.35) e, foi escolhido uma função arbitrária χ apropriada para a obtenção de cada uma das equações de balanço: densidade do número de partículas, densidade de energia e da densidade de momento, separadamente.

Para obter a densidade de massa, a densidade de energia e a densidade de momento, foram feitas as seguintes escolhas para a função χ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \chi &= m^4, \\ \chi &= \frac{m^4 u^0}{c}, \\ \chi &= \frac{m^4 v^i u^0}{c}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Para facilitar a apresentação, os cálculos referentes a estas densidades foram apresentadas separadamente.

Densidade de Massa 1PN

Para a equação do balanço da densidade de massa, foram solucionadas as integrais da equação (5.41) para $\chi = m^4$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - \phi \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \rho V^i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - \phi \right) \right] \right\} = \frac{2\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + V^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right), \quad (5.43)$$

onde $\rho = mn$ é a densidade de massa. A equação (5.43) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - 3\phi \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \rho V^i \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - 3\phi \right) \right] \right\} = 0. \quad (5.44)$$

Agora, usando a equação da continuidade newtoniana em (5.44),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^i}{\partial x^i} = 0, \quad (5.45)$$

e, introduzindo de acordo com o trabalho de Chandrasekhar [8], a densidade de massa

$$\rho^* = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - 3\phi \right) \right], \quad (5.46)$$

é retomada a lei de conservação de densidade de massa ρ^* em 1PN, chamando

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* V^i}{\partial x^i} = 0. \quad (5.47)$$

A equação (5.47) apresenta a mesma forma da equação da continuidade e corresponde a equação (117) do trabalho [8], com a seguinte identificação para o potencial gravitacional $\phi = -U$.

Densidade de Energia 1PN

Para a equação do balanço da densidade de energia, as integrais da equação (5.41) são solucionadas para $\chi = \frac{m^4 u^0}{c}$:

$$\frac{\partial \epsilon \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - \phi \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial V^i \left[\epsilon + \frac{p}{c^2} + \frac{\epsilon}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - \phi \right) \right]}{\partial x^i} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (5.48)$$

A equação (5.48) da densidade de energia corresponde a equação (9.8.14) do livro do Weinberg [6]. A expressão para a densidade de energia ϵ é conhecida a partir da

teoria cinética dos gases relativistas e é dada pela equação (5.49), abaixo. Para efeito de comparação com a equação da densidade de energia obtida por Chandrasekhar [8], foram realizadas as seguintes identificações para as quantidades σ e Π do referido trabalho:

$$\epsilon = \left(1 + \frac{3kT}{2mc^2}\right) = \rho \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right), \quad (5.49)$$

$$\sigma = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(V^2 - 2\phi + \Pi + \frac{p}{\rho}\right)\right] = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(V^2 - 2\phi + \frac{5p}{2\rho}\right)\right]. \quad (5.50)$$

Logo, levando em conta as equações (5.49) e (5.50), a equação (5.48) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma V^i}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0. \quad (5.51)$$

A equação (5.51) acima, corresponde a equação (64) do trabalho do Chandrasekhar [8].

Densidade de Momento 1PN

Para a obtenção da equação do balanço da densidade de momento, as integrais da equação (5.41) são solucionadas para o caso de $\chi = \frac{m^4 v^i u^0}{c}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\epsilon + \frac{p}{c^2} + \frac{\epsilon}{c^2} (V^2 - 2\phi) \right] V^i \right\} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ \left[\epsilon + \frac{p}{c^2} + \frac{\epsilon}{c^2} (V^2 - 2\phi) \right] V^i V^j \right\} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[p \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] \\ - \epsilon \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi + \frac{2\phi^2}{c^2} + \frac{\psi}{c^2} \right) - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c^2} (V^2 - 2\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{\epsilon}{c^2} V^j \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} \right) + 4 \frac{\epsilon}{c^2} V^i \frac{\partial \phi}{\partial t} + 4 \frac{p}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\ + 4 \frac{\epsilon}{c^2} V^i V^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \frac{\epsilon}{c^2} \left(\frac{3p}{\epsilon} + V^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

A equação (5.52) corresponde a equação (9.8.15) do livro do Weinberg [6]. Esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma V_i V_j + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[p \left(1 - 2 \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] - \frac{4\rho}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\phi V^i - \frac{\xi^i}{4} \right) - \frac{\rho}{c^2} V^j \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} \\ + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(V^2 - \phi + \frac{9p}{4\rho} \right) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Para escrever a equação (5.53) acima, foi introduzido σ dado pela equação (5.50) e

usando a expressão do balanço da densidade de momento newtoniana,

$$\rho \frac{dV^i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 0, \quad (5.54)$$

onde $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ denota a derivada material-temporal.

Ainda, as seguintes identificações são feitas para os potenciais gravitacionais de acordo com Chandrasekhar:

$$\xi_i = -4U_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial x^i}, \quad \psi = -2\Phi, \quad \phi = -U. \quad (5.55)$$

O único termo o qual não está presente é $\frac{\rho}{2c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$, pois não considerados nesta tese os termos referentes a componente g_{0i} do tensor métrico. Com as identificações feitas em (5.55), a equação (5.53) corresponde a equação (68) do Chandrasekhar [8]. Aqui, vale notar que o lado direito da equação de Boltzmann se anula para as escolhas de m^4 , $m^4 u^0/c$, $m^4 u^0 v^i/c$ desde que as densidades de massa, momento e energia sejam quantidades conservativas na colisão.

5.4.3 Obtenção da equação de Lane-Emden na aproximação pós-newtoniana

A obtenção da equação de Lane-Emden na aproximação pós-newtoniana segue praticamente os mesmos passos da teoria newtoniana, porém levando em conta os termos da ordem de até $1/c^2$ das expressões utilizadas.

Primeiramente, parte-se do sistema de equações formado pelas seguintes equações:

1) Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho. \quad (5.56)$$

2) Equação para o potencial ψ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -8\pi G \rho \left[\phi - \frac{9p}{4\rho} \right]. \quad (5.57)$$

Juntamente com a equação de balanço de densidade de momento

$$\frac{d}{dr} \left[p \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] + \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 - \frac{2}{c^2} \left(\phi - \frac{9p}{4\rho} \right) \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0. \quad (5.58)$$

A equação (5.58) é obtida a partir da equação (5.53) para um sistema auto-gravitante estacionário onde a velocidade hidrodinâmica é igual a zero, $V = 0$. Em coordenadas esféricas, somente há a dependência de ρ , p e $\phi = -\phi$ e $\psi = -\psi$ é com a coordenada radial, e esta equação se reduz a:

$$\frac{d}{dr} \left[p \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] - \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\phi + \frac{9p}{4\rho} \right) \right] - \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0. \quad (5.59)$$

As equações de Poisson em coordenadas esféricas, são

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \phi = -4\pi G \rho, \quad (5.60)$$

e

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \psi = -8\pi G \rho \left[\phi + \frac{9p}{4\rho} \right]. \quad (5.61)$$

A equação (5.59) pode ser reescrita como

$$\frac{dp}{dr} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) - \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\phi + \frac{5p}{4\rho} \right) \right] - \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad (5.62)$$

considerando apenas os termos até $\frac{1}{c^2}$, tem-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \left(1 - \frac{5}{2c^2} \frac{p}{\rho} \right) - \frac{d}{dr} \left(\phi + \frac{\psi}{c^2} \right) = 0. \quad (5.63)$$

A equação (5.63) é solucionada para densidade de massa ρ como função dos potenciais ϕ e ψ , uma vez que é assumida uma equação de estado que relaciona a pressão p com a densidade de massa ρ . Como é feito usualmente, é escolhida uma equação de estado politrópica $p = k\rho^\gamma$, onde k e γ são constantes. Inserindo a equação de estado politrópica $p = k\rho^\gamma$ em (5.63) e integrando, o resultado é a equação que segue

$$\phi + \frac{\psi}{c^2} = \frac{\gamma k \rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} - \frac{5}{4c^2} \frac{\gamma k^2 \rho^{2(\gamma-1)}}{\gamma - 1}. \quad (5.64)$$

A equação acima pode ser solucionada para ρ até a ordem de $\frac{1}{c^2}$, resultando em

$$\rho = \left(\frac{\phi}{(n+1)k} \right)^n \left\{ 1 + \frac{n}{c^2} \left[\frac{5\phi}{4(n+1)} + \frac{\psi}{\phi} \right] \right\}. \quad (5.65)$$

Aqui, é introduzido o chamada índice politrópico $n = 1/(\gamma - 1)$. Agora, combinando a equação de Poisson (5.56) e (5.57), tem-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\phi + \frac{\psi}{c^2} \right) \right] = -4\pi G \rho \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\phi + \frac{9p}{4\rho} \right) \right]. \quad (5.66)$$

Se, forem eliminados os potenciais ϕ e ψ da equação (5.66) acima, usando (5.65) e a equação de estado politrópica $p = k\rho^\gamma$, obtém-se a seguinte equação diferencial para a densidade de massa:

$$k(n+1)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\left(\rho^{\frac{1}{n}} - \frac{5k}{4c^2}\rho^{\frac{2}{n}}\right)\right] = -4\pi G\rho\left[1 + \frac{(4n+13k)}{2c^2}\rho^{\frac{1}{n}}\right]. \quad (5.67)$$

Agora, retomando as variáveis adimensionais das equações (5.8) e (5.9):

$$z = \frac{r}{\xi}, \omega(z) = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (5.68)$$

onde ρ_c é a densidade de massa central de uma estrela e

$$\xi = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}. \quad (5.69)$$

Nestas novas variáveis temos que a equação (5.58) é

$$\left(1 - \frac{5p_c}{2c^2\rho_c}\omega(z)\right)\left[\frac{d^2\omega(z)}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\omega(z)}{dz}\right] - \frac{5p_c}{2c^2\rho_c}\left(\frac{d\omega(z)}{dz}\right)^2 = -\omega(z)^n\left(1 + \frac{(4n+13k)p_c}{2c^2}\rho_c\omega(z)\right), \quad (5.70)$$

ou, considerando apenas os termos até a ordem de $\frac{1}{c^2}$ temos uma versão equivalente a equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana,

$$\left(1 - \frac{(2n+9)p_c}{c^2\rho_c}\omega(z)\right)\left[\frac{d^2\omega(z)}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\omega(z)}{dz}\right] - \frac{5p_c}{2c^2\rho_c}\left(\frac{d\omega(z)}{dz}\right)^2 + \omega(z)^n = 0. \quad (5.71)$$

Ou ainda,

$$\frac{d^2\omega(z)}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\omega(z)}{dz} - \frac{5p_c}{2c^2\rho_c}\left(\frac{d\omega(z)}{dz}\right)^2 + \omega(z)^n\left(1 + \frac{(2n+9)p_c}{c^2\rho_c}\omega(z)\right) = 0. \quad (5.72)$$

A equação (5.72) é a equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana. Aqui, é importante notar que o termo $\frac{5p_c}{2c^2\rho_c}$ escrito em termos da pressão central, densidade central e velocidade da luz e é a relação entre essas grandezas físicas que são consideradas ao serem analisadas as estruturas astrofísicas desta tese. É a relação dada pelas grandezas deste termo que de certa forma determinam para quais estruturas estelares as contribuições do modelo são relevantes ou não, para estrelas de nêutrons ou sol, por exemplo. Vale notar que ao serem desconsiderados os termos $\frac{1}{c^2}$, a equação de Lane-Emden newtoniana é retomada. É importante mencionar que uma versão da equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana em termos da velocidade angular é obtida em [31] para uma proposta de modelo de estruturas politrópicas levando em conta a rotação e a simetria do sistema é axial, ainda nesta versão não aparecem os potenciais gravitacionais. Devido à simetria adotada, a adição da rotação e à velocidade angular, a equação obtida em [31] é diferente da equação obtida nesta tese. Uma das razões desta

diferença está relacionado com a simetria considerada para a obtenção da equação, nesta tese a simetria considerada é esférica e em [31] é simetria axial. Outra razão, é que nesta tese a equação de Lane-Emden foi obtida a partir da equação de Boltzmann na primeira aproximação pós-newtoniana e escrita em termos dos potenciais gravitacionais.

5.5 EQUAÇÕES DA ESTRUTURA ESTELAR

As características físicas das estruturas estelares tais como raio, massa, temperatura, densidade de matéria e pressão, podem ser escritas a partir da solução da equação de Lane-Emden. Nesta seção, primeiramente serão apresentados os resultados da teoria newtoniana de tais grandezas físicas, já conhecidos na literatura. Na sequência, serão apresentados os resultados obtidos nesta tese, para estas grandezas na primeira aproximação pós-newtoniana.

5.5.1 Modelo de estrutura estelar na teoria newtoniana

Raio Estelar

O raio estelar R é obtido a partir das equações (5.68) e (5.69). Com isso, o raio estelar $R = \xi z_{(n)}$ é dado por [34]:

$$R = \xi z_{(n)} = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G} \rho_c^{\frac{(1-n)}{n}}} z_{(n)}, \quad (5.73)$$

onde G é constante gravitacional, k é a constante politrópica, e $z_{(n)}$ é o primeiro zero de $\omega(n)$ da solução da Equação de Lane-Emden. Aqui, vale notar que, como o raio é definido pelo primeiro zero na solução, os valores grandes de z não são relevantes para os modelos estelares. O limite de estrelas é indicado por $\omega = 0$ [115], logo tem-se

$$R = (r)_{\omega=0}, \quad GM = \left(-r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)_{\omega=0}, \quad (5.74)$$

$$R' = (z)_{\omega=0} = z_{(n)}, \quad M' = \left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right)_{\omega=0}. \quad (5.75)$$

Com as equações (5.74) e (5.75), é possível escrever a seguinte relação

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G} \rho_c^{\frac{(1-n)}{n}}}. \quad (5.76)$$

Massa Estelar

A definição da massa $M(z)$ interior a z é dada por [34]:

$$M(z) = \int_0^{\xi z} 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \xi^3 \rho_c \int_0^z z^2 w^n dz. \quad (5.77)$$

Usando a equação de Lane-Emden (5.72) e integrando sobre toda a estrela, obtém-se

$$M = 4\pi\xi^3\rho_c \left(-z^2 \frac{dw}{dz} \right)_{z_{(n)}}. \quad (5.78)$$

Além disso, substituindo a expressão para ξ definida em (5.9), tem-se:

$$M = 4\pi \left\{ \frac{[(n+1)k]}{4\pi G} \right\}^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{(3-n)}{2n}} \left(-z^2 \frac{d\omega}{dz} \right)_{z_{(n)}}. \quad (5.79)$$

Ainda, a partir de relação escrita em (5.75) para M' , tem-se a seguinte relação:

$$\frac{GM}{M'} = \frac{[(n+1)k]^{\frac{3}{2}}}{[4\pi G]^{\frac{1}{2}}} \rho_c^{\frac{(3-n)}{2n}}. \quad (5.80)$$

Sendo assim, ao saber os valores de massa M e raio R , é conveniente que as expressões sejam escritas em termos destas grandezas [115].

Relação Massa-Raio

Para que a relação entre a massa e o raio seja obtida, é eliminada a densidade central ρ_c da equação (5.80) através de (5.76). Com isso, obtém-se

$$\left(\frac{GM}{M'} \right)^{(n-1)} \left(\frac{R}{R'} \right)^{(n-3)} = \frac{[(n+1)k]^n}{4\pi G}. \quad (5.81)$$

A equação (5.81) acima, permite que o valor de k pode ser determinado a partir dos dados de massa M e raio R da estrela considerada.

Condensação Central

A condensação central de uma estrela é definida como a razão entre a densidade média e a densidade central da configuração. A densidade média de uma esfera de raio $R = \xi z_{(n)}$ é dada por:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\xi^3 z_{(n)}^3}. \quad (5.82)$$

Usando a equação (5.82), temos a seguinte relação para densidade central,

$$\rho_c = \frac{z_{(n)}^3}{3M'} \bar{\rho}. \quad (5.83)$$

Através da relação entre as densidades dada pela equação (5.83), verifica-se que para um dado politrópico de índice n , a densidade central é um múltiplo da densidade média.

Pressão Estelar

A equação para pressão estelar é dada por (5.6). Logo, a pressão para o centro da estrela é,

$$p_c = \frac{\rho_c \phi_c}{(n+1)}. \quad (5.84)$$

Multiplicando o inverso de (5.76) por (5.81), pode-se escrever a seguinte relação,

$$\frac{GM}{M'} \frac{R'}{R} = (n+1)k\rho_c^{\frac{1}{n}}. \quad (5.85)$$

Pela equação (5.85) acima, é possível notar que ρ_c pode ser determinado a partir dos dados de massa M e raio R de uma determinada estrela.

Agora, sabendo que $p = k\rho^\gamma = k\rho^{\frac{(n+1)}{n}}$ e usando a equação para a condensação central (5.83) juntamente com a equação (5.85), no centro da configuração a pressão central é dada por

$$p_c = \frac{GM}{M'^2} \frac{R'}{R} \frac{z_{(n)}^3}{3} \frac{\bar{\rho}}{(n+1)}. \quad (5.86)$$

Ainda, pode-se escrever a pressão no interior da estrela em função de ω :

$$p = p_c \omega^{(n+1)}. \quad (5.87)$$

A equação (5.87) é escrita a partir da definição de ω (5.8) e da equação de estado politrópica (5.3).

Temperatura Estelar

A temperatura central da configuração é determinada a partir da lei dos gases ideais:

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu m_\mu}, \quad (5.88)$$

onde μ é a massa atômica, m_μ é a massa atômica unitária e k_B é a constante de Boltzmann.

Considerando $\rho = \rho_c \omega^n$ e $p = p_c \omega^{(n+1)}$, a equação (5.88) pode ser escrita da seguinte maneira

$$T = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B} \omega. \quad (5.89)$$

Definindo a temperatura central T_c como,

$$T_c = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B}, \quad (5.90)$$

uma vez que no centro da configuração $\omega = 1$. Das equações (5.84) e (5.85), a temperatura

central pode ser escrita da seguinte maneira:

$$T_c = \frac{\mu m_\mu}{(n+1)k_B} \frac{GM}{M'} \frac{R'}{R}. \quad (5.91)$$

Ainda, usando (5.89), a temperatura no interior da estrela em função de ω é dada por:

$$T = T_c \omega. \quad (5.92)$$

5.5.2 Modelos Estelares na aproximação pós-newtoniana

Nesta seção, serão apresentadas as equações obtidas nesta tese para estruturas estelares na primeira aproximação pós-newtoniana.

Raio Estelar em 1PN

Da mesma maneira que foi feito anteriormente para a teoria newtoniana, tem-se que o raio da estrela é dado a partir das equações (5.68) e (5.69):

$$R = \xi z_{(n)} = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G} \rho_c^{\frac{(1-n)}{n}}} z_{(n)}, \quad (5.93)$$

onde $z_{(n)}$ é o primeiro zero da solução da Equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana.

O limite de estrelas é indicado por $\omega = 0$, novamente tem-se

$$R = (r)_{\omega=0}, \quad GM = \left(-r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)_{\omega=0}, \quad (5.94)$$

$$R'_{PN} = (z)_{\omega=0} = z_{(n)}, \quad M'_{PN} = \left\{ \int_0^z \left[-\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) \left(1 - \frac{(2n+9)p_c}{c^2} \omega \right) + \frac{5p_c}{2c^2 \rho_c} \left(z \frac{d\omega}{dz} \right)^2 \right] dz \right\}_{\omega=0}. \quad (5.95)$$

A relação entre R e R' , é dada por:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{(n+1)k}{4\pi G} \rho_c^{\frac{(1-n)}{n}}}. \quad (5.96)$$

Vale notar que, as equações (5.94) e (5.95) acima, apresentam termos adicionais devido às correções advindas da aproximação pós-newtoniana. Ainda, se os termos de $1/c^2$ forem desprezados, retomam-se as equações da teoria newtoniana.

Massa Estelar em 1PN

Retomando, a definição de massa é dada pela equação (5.77) [34]

$$M(z) = \int_0^{\xi z} 4\pi \rho r^2 dr = 4\pi \xi^3 \rho_c \int_0^z z^2 w^n dz. \quad (5.97)$$

Para determinar a equação na primeira aproximação pós-newtoniana da massa $M(z)$, a equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana dada pela equação (5.72) é substituída na definição de massa (5.77), obtendo:

$$M = 4\pi\xi^3\rho_c \left\{ \int_0^z \left[-\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) \left(1 - \frac{(2n+9)p_c}{c^2\rho_c} \omega \right) + \frac{5p_c}{2c^2\rho_c} \left(z \frac{d\omega}{dz} \right)^2 \right] dz \right\}_{z(n)} . \quad (5.98)$$

onde ξ dado pela equação (5.69).

Condensação Central em 1PN

A mesma maneira usada para obter a condensação central na teoria newtoniana, é usado aqui. A condensação central é dada através da densidade média de uma estrela de raio $R = \xi z(n)$ e da equação (5.98). Para a massa da configuração na primeira aproximação pós-newtoniana, resulta em

$$\rho_c = \frac{z(n)^3}{3} \bar{\rho} \left[\int_0^z -\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) \left(1 - \frac{(2n+9)p_c}{c^2\rho_c} \omega \right) dz + \frac{5p_c}{2c^2\rho_c} \int_0^z \left(z \frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz \right]_{z(n)}^{-1}, \quad (5.99)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade média.

Pressão Estelar em 1PN

Da relação massa-raio (5.109) e da equação para R (5.96), tem-se:

$$\frac{GM}{M'_{PN}} \frac{R'_{PN}}{R} = (n+1)k\rho_c^{\frac{1}{n}}. \quad (5.100)$$

Usando a equação politrópica $p = k\rho^\gamma = k\rho^{\frac{(n+1)}{n}}$ no centro da configuração, a pressão central é dada por:

$$p_c = \frac{GM}{M'_{PN}} \frac{R'_{PN}}{R} \frac{z(n)^3}{3} \frac{\bar{\rho}}{(n+1)}. \quad (5.101)$$

Ou mais explicitamente, escreve-se

$$p_c = \frac{GM}{M'_{PN}} \frac{R'_{PN}}{R} \frac{z(n)^3}{3} \frac{\bar{\rho}}{(n+1)} \left[\int_0^z -\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\omega}{dz} \right) \left(1 - \frac{(2n+9)p_c}{c^2\rho_c} \omega \right) dz + \frac{5p_c}{2c^2\rho_c} \int_0^z \left(z \frac{d\omega}{dz} \right)^2 dz \right]_{z(n)}^{-1}. \quad (5.102)$$

A pressão no interior da estrela é dada em função de ω :

$$p = p_c \omega^{(n+1)}. \quad (5.103)$$

A equação (5.103) é obtida a partir das seguintes equações: equação politrópica dada por (5.3), definição de ω (5.8) e (5.100). Ainda, nota-se que p_c é dado pela equação (5.102).

Temperatura Estelar em 1PN

Da mesma maneira que foi feito para teoria newtoniana, a definição da temperatura central estelar é:

$$T_c = \frac{p_c \mu m_\mu}{\rho_c k_B}. \quad (5.104)$$

Usando as equações para p_c e ρ_c , dadas por (5.102) e (5.99), respectivamente. A equação (5.104) é reescrita como,

$$T_c = \frac{\mu m_\mu}{(n+1)k_B} \frac{GM}{M'} \frac{R'}{R}, \quad (5.105)$$

onde μ é a massa atômica, m_μ é a massa atômica unitária e k_B é a constante de Boltzmann. A temperatura no interior da estrela em função de ω é dada por:

$$T = T_c \omega^{(n+1)}. \quad (5.106)$$

A equação (5.106) é obtida da mesma forma que a equação (5.103), em que T_c é dado por (5.105).

Relação Massa-Raio em 1PN

Para escrever a relação massa-raio, multiplica-se inverso do raio R dado pela equação (5.96) por $GM = 4\pi G \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} M'$, obtendo

$$\frac{GM}{M'_{PN}} \frac{R'_{PN}}{R} = (n+1)k \rho_c^{\frac{1}{n}}. \quad (5.107)$$

Usando a equação politrópica, tem-se

$$\frac{GM}{M'_{PN}} \frac{R'_{PN}}{R} = (n+1) \frac{p_c}{\rho_c}. \quad (5.108)$$

Isolando M na equação acima, tem-se a relação massa-raio

$$M = \left[\frac{(n+1) p_c}{G} \frac{M'}{\rho_c R'} \right] R. \quad (5.109)$$

É válido mencionar que a relação massa-raio como uma relação linear determinada aqui está em acordo com a obtida no trabalho [116]. Em [116] é proposto um modelo padrão para estrelas massivas no qual é considerado um sistema formado por um gás ideal mais radiação.

5.6 SOLUÇÕES POLITRÓPICAS

Nesta seção, serão obtidas soluções politrópicas para o modelo proposto nesta tese de estruturas estelares segundo as teorias: newtoniana e pós-newtoniana para estrelas de Nêutrons e Anãs Brancas. Serão apresentados os resultados para a pressão, densidade de massa e temperatura no interior de cada estrela considerada, para o valor de n correspondente a sua classe e com os valores de densidade central e pressão central obtidos pelo modelo Newtoniano. Além disso, os resultados para a relação massa-raio de cada estrela. Os resultados foram obtidos e comparados para as seguintes estrelas de nêutrons: PSR J0348+0432, PSR J1748-2021B, PSR J1748-2246ad e PSR J1614-2230⁵, e para um exemplo de Anã Branca (ver apêndice E). É relevante mencionar, que os dados de massa e raio de cada estrela são usados para calcular os valores de pressão, temperatura e densidade do modelo desenvolvido nesta tese. Ainda para este modelo, as classes de estrelas como Anãs Brancas, Anãs Marrons e Sol não apresentam correções pós-newtonianas, ou as correções apresentadas são irrelevantes como será visto no caso das Anãs Brancas. Primeiramente, será apresentada como foram obtidas soluções para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio analiticamente, considerando que a mesma metodologia é usada para descrever os resultados para todas as estrelas. Na sequência, serão apresentados em detalhes as soluções obtidas numericamente para a densidade de massa, pressão, temperatura e massa-raio em relação ao raio, onde o raio R é normalizado (distância do centro da estrela até um ponto próximo à superfície)). Por fim, serão feitas as conclusões e considerações sobre os resultados obtidos.

Densidade de Massa

A primeira grandeza física apresentada é a densidade de massa. Para determinar o comportamento da densidade de massa no interior de uma estrela, foram solucionadas as equações: (5.83) para o caso Newtoniano e (5.99) para a primeira aproximação pós-newtoniana (1PN). Considerando que a densidade média é calculada a partir dos dados estimados na literatura para massa M e para o raio R da estrela considerada. Para ambos os casos, a equação (5.8) define ω em função de r . Vale notar que para efeitos de comparação entre as curvas, para todos os casos, o raio foi normalizado (distância do centro da estrela até um ponto próximo à superfície).

Pressão

Para determinar as curvas que descrevem o comportamento da pressão no interior das estrelas foram usadas as expressões (5.86) e (5.87) para o caso Newtoniano, e as equações (5.102) e (5.103) para a aproximação pós-newtoniana. Para isto, foram solucionadas numericamente as equações de Lane-Emden nas teorias newtoniana e pós-newtoniana

⁵No nome das estrelas de Nêutrons, PSR é abreviação de Pulsating Source of Radio, J são as coordenadas precisas no céu em relação ao sistema de coordenadas equatoriais (análogo a coordenada geográfica de longitude), os quatro últimos números representam o declínio da estrela, ou seja, ângulo usado para definir a posição da estrela em relação ao sistema de coordenadas equatoriais e os quatro primeiros números é a indicação da ascensão em linha reta.

(5.10) e (5.72), respectivamente. Para obter-se, em ambos os casos ω em função de z , consequentemente, p em função de z , e por fim, em função de R .

Temperatura

A análise do comportamento da temperatura das estrelas de Nêutrons nesta tese, parte-se das equações (5.91) e (5.92) para a descrição da temperatura no modelo Newtoniano, e das equações (5.105) e (5.106) para o modelo pós-Newtoniano. Deve-se lembrar que cada estrela possui um valor de m_μ (massa atômica) associado, conforme sua composição. Com o objetivo de obter a temperatura em função de R (normalizado), novamente a equação de Lane-Emden é solucionada.

Relação Massa - Raio

A relação massa-raio é dada pela equação (5.109), a obtenção desta equação foi apresentada anteriormente. As soluções numéricas newtonianas e pós-newtonianas para as estrelas de Nêutrons apresentadas nesta tese estão representadas graficamente na sequência desta seção.

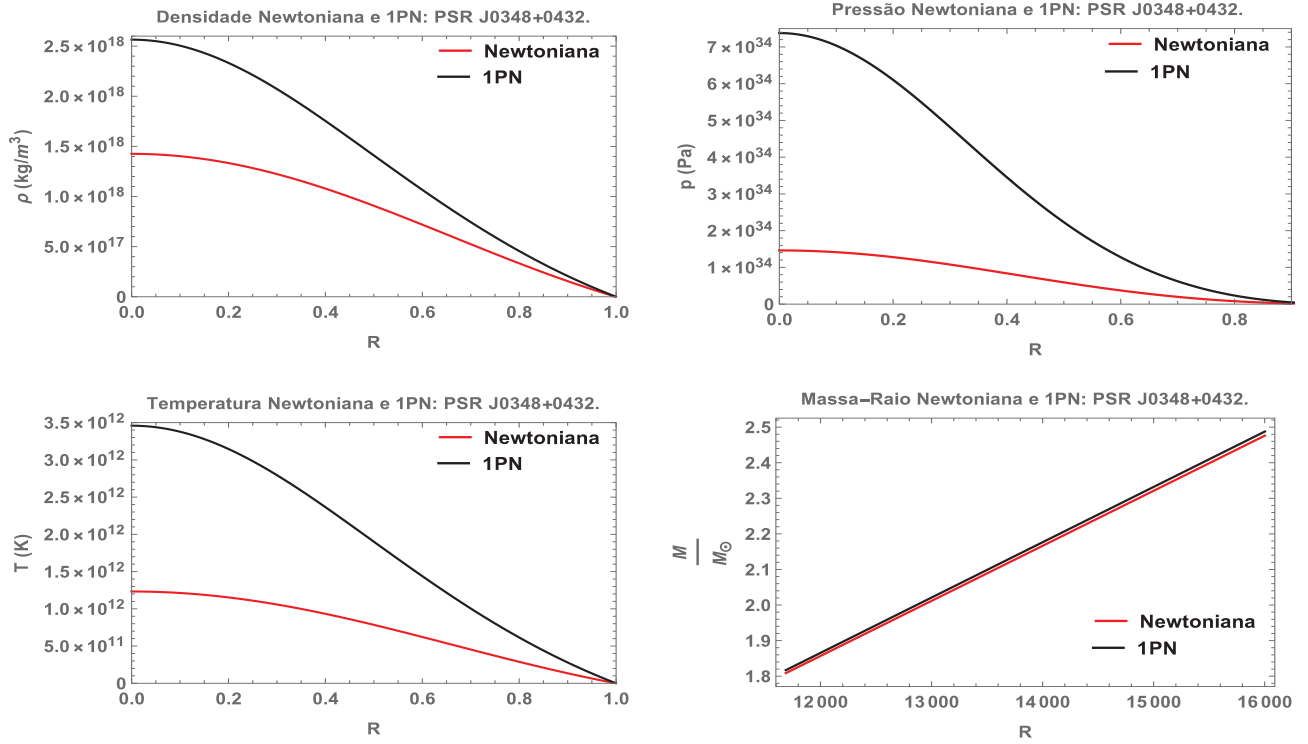
5.6.1 Soluções Numéricas para Estrelas de Nêutrons

Considerando as expressões matemáticas mencionadas anteriormente para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio, são obtidas as soluções numéricas apresentadas para cada uma das estrelas de Nêutrons. Para a obtenção da solução, são utilizados os dados de massa e raio de cada estrela.

PSR J0348+0432

A estrela denominada PSR J0348+0432, é uma estrela de nêutrons que foi descoberta em 2007, e pertence a um sistema binário com uma Anã Branca [117]. Em 2013, uma medida de massa para essa estrela de nêutrons foi anunciada: $M = 2.01 \pm 0.04 M_\odot$ [118], o raio desta estrela mede aproximadamente $R = 1.87 \times 10^{-5} R_\odot$ [119]. As curvas para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio em função do raio R normalizado (distânciado centro da estrela até um ponto próximo à superfície) da estrela PSR J0348+0432 para as teorias newtoniana e pós-newtoniana estão representadas graficamente na figura 5.2.

Figura 5.2: Soluções politrópicas da estrela PSR J0348+0432. newtoniana: curva em vermelho; pós-newtoniana: curva em preto.

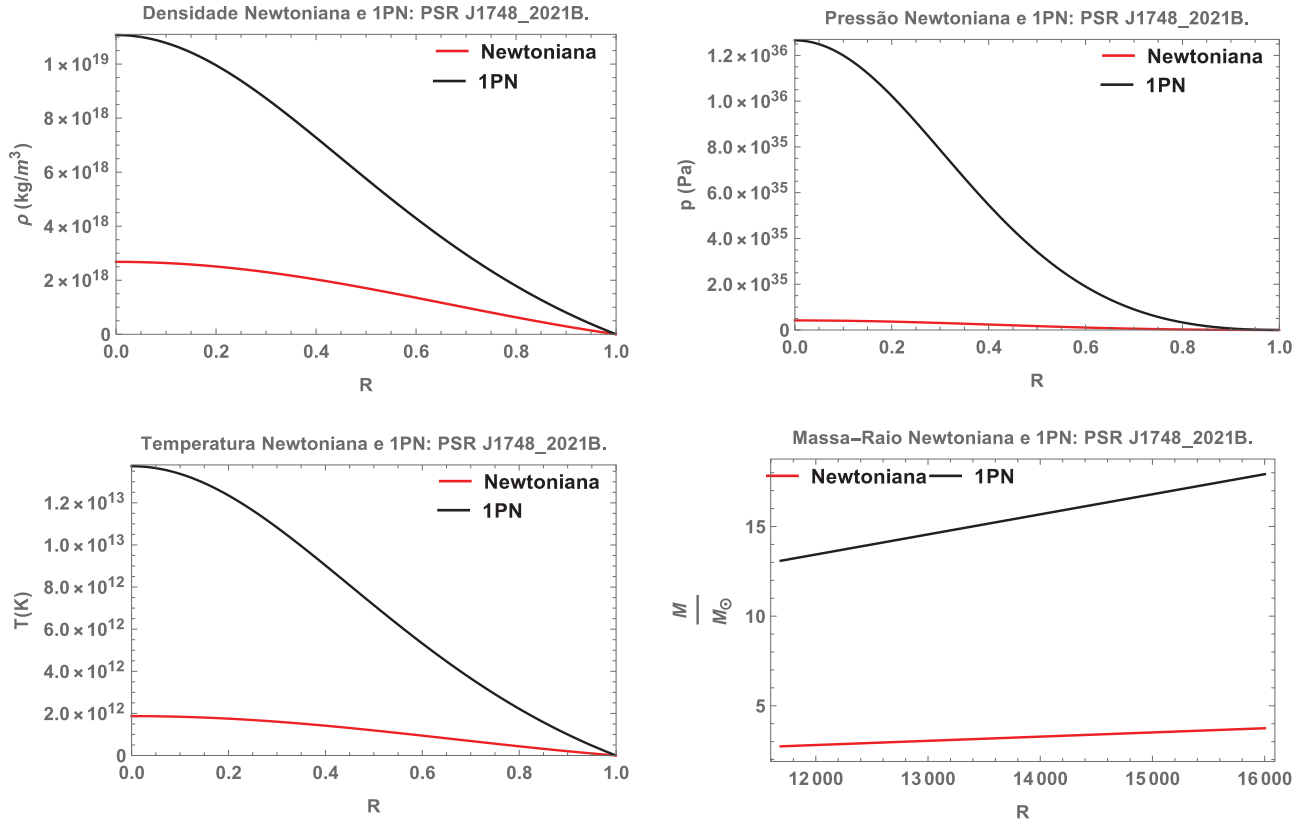


O comportamento das grandezas físicas representadas na figura 5.2, apresentam contribuições pós-newtonianas maiores que a newtoniana para todas as grandezas analisadas. O objetivo é ilustrar os efeitos das correções pós-newtonianas adotadas no modelo desta tese. De acordo com essa suposição, as equações da estrutura estelar foram resolvidas numericamente, evidenciando o papel que as correções pós-newtonianas desempenham nessas equações. Desta forma, as expressões de pressão, densidade e temperatura dependem estritamente dos valores dessas correções como é possível notar nas curvas da figura acima. Vale notar que as curvas para a relação massa-raio são as que apresentam uma pequena contribuição pós-newtoniana comparada à newtoniana. Será visto que o mesmo ocorre para as estrelas PSR J1748-2446ad e PSR J1614-2230. Este resultado tem relação com os valores de massa, raio, densidades e pressão pós-newtoniana e newtoniana.

PSR J1748-2021B

A estrela denominada PSR J1748-2021B tem a massa estimada desta estrela de Nêutrons foi anunciada: $M = 2.74M_\odot$ e o raio aproximadamente $R = 1.68 \times 10^{-5}R_\odot$ [120]. As curvas para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio em função do raio R normalizado (distânciado centro da estrela até um ponto próximo à superfície) da estrela PSR J1748-2021B nas teorias newtoniana e pós-newtoniana estão representadas graficamente na figura 5.3.

Figura 5.3: Soluções politrópicas da estrela PSR J1748-2021B. newtoniana: curva em vermelho; pós-newtoniana: curva em preto.

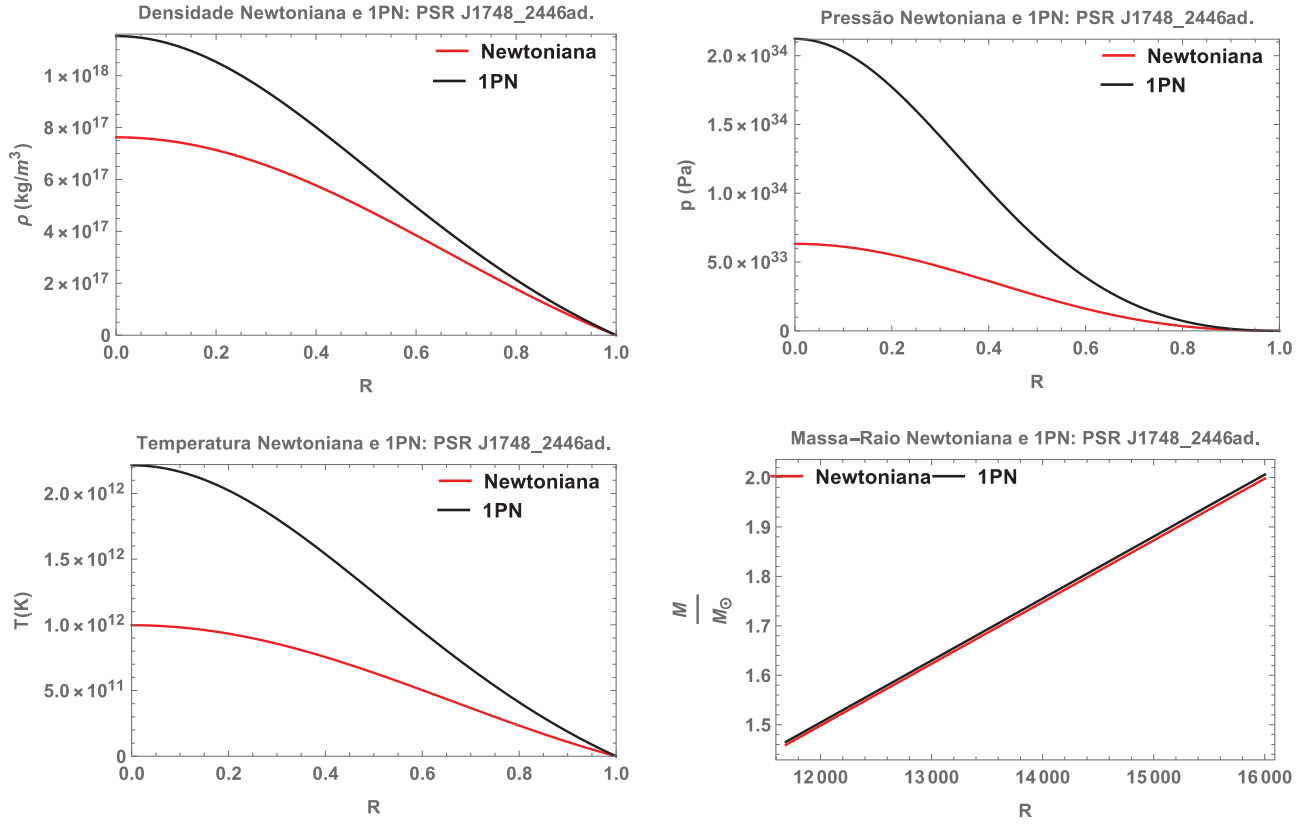


Para o comportamento das curvas da figura 5.3 as mesmas considerações e conclusões feitas para o caso da estrela PSR J0348+0432 são válidas. Exceto para a relação massa-raio. Para esta estrela, a contribuição pós-newtoniana associada a relação massa-raio é bastante acentuada em relação à newtoniana, comparadas as demais estrelas estudadas nesta tese. A justificativa para isto é que os valores encontrados no modelo para a densidade e pressão pós-newtoniana são da ordem de $10x$ maiores que o caso newtoniano.

PSR J1748-2446ad

A estrela de Nêutrons, denominada PSR J1748-2446ad tem a massa estimada para essa estrela de nêutrons foi anunciada: $M = 2M_\odot$ e o raio mede aproximadamente $R = 2.3 \times 10^{-5} R_\odot$ [101]. As curvas para a densidade de massa ρ em função do raio R , pressão p , temperatura T e relação massa-raio em função do raio R normalizado (distânciado centro da estrela até um ponto próximo à superfície) nas teorias newtoniana e pós-newtoniana, para a estrela PSR J1748-2446ad estão representadas graficamente na figura 5.4.

Figura 5.4: Soluções politrópicas da estrela PSR J1748-2446ad. newtoniana: curva em vermelho; pós-newtoniana: curva em preto.

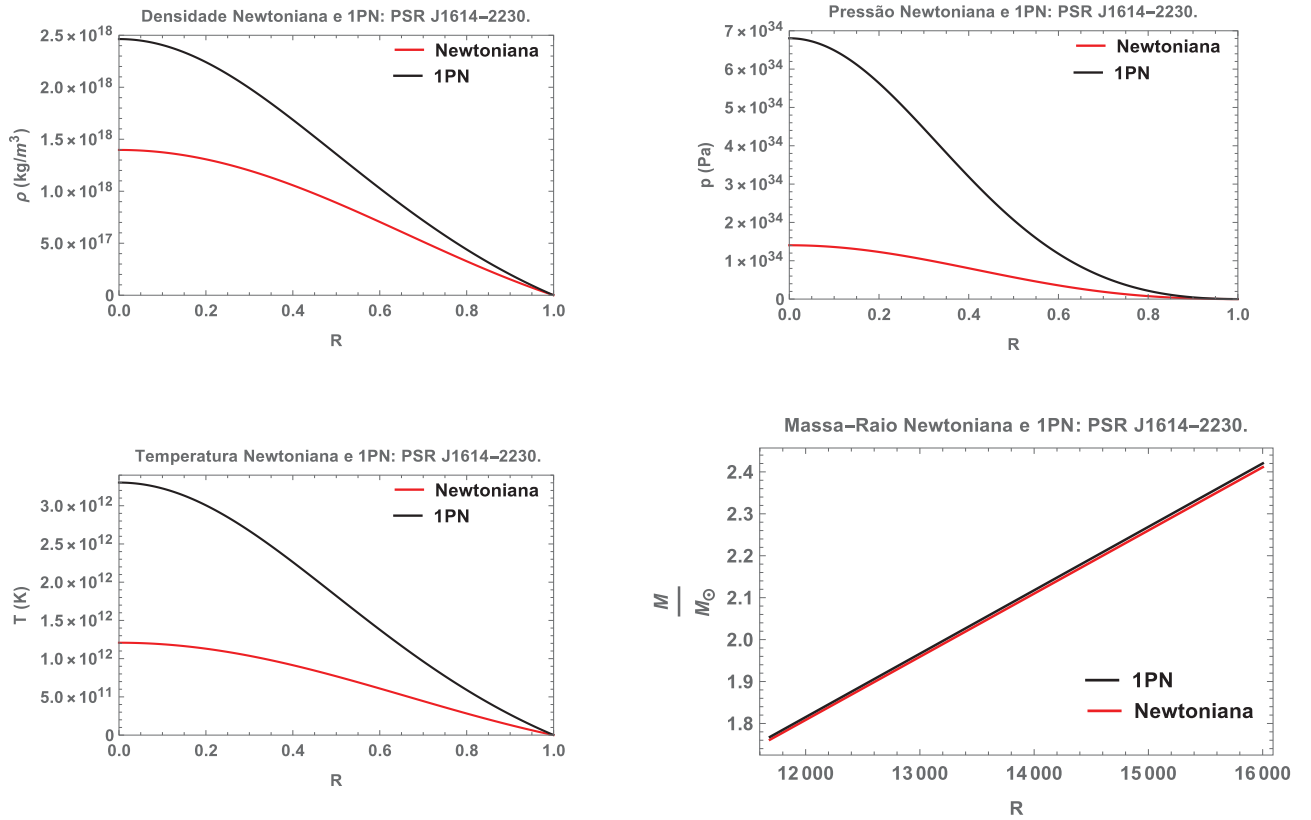


Novamente, para o comportamento das curvas da figura 5.4 as mesmas considerações e conclusões feitas para o caso da estrela PSR J0348+0432 são válidas.

PSR J1614-2230

A estrela de Nêutrons, denominada PSR J1614-2230, tem a massa estimada para essa estrela de nêutrons foi anunciada: $M = 1.97M_\odot$ e o raio mede aproximadamente $R = 1.87 \times 10^{-5}R_\odot$ [121]. As curvas para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio em função do raio R normalizado (distânciado centro da estrela até um ponto próximo à superfície) nas teorias newtoniana e pós-newtoniana, para a estrela PSR J1614-2230 estão representadas graficamente na figura 5.5.

Figura 5.5: Soluções politrópicas da estrela PSR J1614-2230. newtoniana: curva em vermelho; pós-newtoniana: curva em preto.



Por fim, para o comportamento das curvas da figura 5.5 são apresentadas mesmas considerações e conclusões feitas para os demais exemplos de estrelas estudados nesta tese.

Considerações do Modelo

Neste modelo, foram analisados numericamente grandezas físicas de estruturas estelares, estrelas de Nêutrons nas teorias pós-newtoniana e newtoniana. As grandezas físicas analisadas foram a pressão, densidade de massa, temperatura e relação massa-raio. Estas quantidades físicas foram obtidas a partir da solução da equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana. É importante mencionar que uma versão da equação de Lane-Emden no contexto do método pós-newtoniano foi obtida em [31]. Esta versão da equação de Lane-Emden foi uma proposta de modelo para estruturas politrópicas levando em conta a rotação e a simetria do sistema é simetria axial. A equação de Lane-Emden obtida no trabalho [31] difere do resultado obtido nesta tese pois é adotada uma simetria diferente, não são considerados termos relacionados à rotação e à velocidade angular.

O objetivo desta análise é ilustrar os efeitos das correções pós-newtonianas consideradas no modelo proposto. De acordo com essa suposição, foram resolvidas numericamente as equações responsáveis pela estrutura estelar, evidenciando o papel que as correções

pós-newtonianas desempenham nessas equações. Desta forma, as expressões de pressão, densidade e temperatura dependem estritamente dos valores dessas correções. Interpretando esses termos adicionais como correções da teoria newtoniana, foram comparados os resultados obtidos para a aproximação pós-newtoniana com os obtidos pela teoria newtoniana. Vale mencionar que nas equações do modelo de estrutura estelar, novos termos relacionados às correções dos potenciais levam a diferentes comportamentos dessas grandezas físicas, como esperado.

Como mencionado anteriormente, a partir das curvas apresentadas nas figuras: 5.2, 5.5, 5.3 e 5.4, é possível inferir que as contribuições pós-newtonianas são relevantes para as grandezas físicas analisadas neste modelo para estrelas de Nêutrons. O comportamento das curvas das grandezas físicas analisadas apresentam contribuições pós-newtonianas maiores que a newtoniana. Pode-ser dizer, fisicamente que devido ao fato de as estrelas de Nêutrons serem estruturas estelares massivas, com altas densidades e campo gravitacional forte, os efeitos das contribuições adicionadas os campos gravitacionais propostas pela aproximação pós-newtoniana aparecem no comportamento das grandezas físicas desta estrela. Como foi visto, nas análises obtidas para as estrelas apresentadas nesta seção. Além disso, é possível justificar que estas sejam características físicas relevantes para a descrição do modelo proposto aqui. Uma vez que, as mesmas análises foram realizadas para um exemplo de Anã Branca, e não houveram contribuições pós-newtonianas nas grandezas físicas analisadas para este caso (ver apêndice E). Além disso, para estrelas como Sol, Anã Marrom e Gigante vermelha os resultados foram os mesmos que os encontrados para a Anã Branca, indicando novamente que este modelo descreve bem as correções pós-newtonianas para estrelas de alta densidade e com alto campo gravitacional. É importante notar que o termo $\frac{5p_c}{2c^2\rho_c}$ que aparece na expressão matemática da equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana é escrito em termos da pressão central, densidade central e velocidade da luz e é a relação entre essas grandezas físicas que são consideradas ao serem analisadas as estruturas astrofísicas desta tese. Além disso, é desta relação que são determinadas para quais estruturas estelares as contribuições do modelo com correções pós-newtonianas são relevantes, como por exemplo para estrela de Nêutrons.

Por fim, o modelo proposto aqui é simples mas os resultados obtidos foram satisfatórios uma vez que melhoram a descrição das estruturas estelares em estudo. Estes resultados são relevantes comparados com os modelos estelares da literatura pois permitem avaliar qual é o comportamento das grandezas como densidade, temperatura e pressão ao serem levadas em conta as correções pós-newtonianas a partir da equação de Lane-Emden em 1PN. Além disso, foi possível obter uma descrição adequada para o modelo das estruturas estelares partindo da equação de Boltzmann, ao invés de propor a descrição a partir da equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) como é usualmente feito na literatura. Vale mencionar que os resultados obtidos aqui podem ser estendidos para estrelas que possuem campos magnéticos e em rotação, e ainda para uma equação de estado diferente.

6 CONCLUSÃO

Nesta tese, foram apresentados dois modelos astrofísicos. O primeiro modelo apresentado foi um modelo para galáxias espirais, e o segundo modelo para estruturas estelares. Para isto, foi utilizado o método matemático chamado de aproximação pós-newtoniana. O objetivo principal de estudar estes modelos no contexto pós-newtoniano foi analisar o papel que essas correções desempenham nas quantidades físicas associadas às estruturas como as galáxias e, posteriormente para estrelas. Adicionalmente, foram comparados os resultados obtidos pelos modelos apresentados aqui com os obtidos pela teoria newtoniana.

O primeiro modelo estudado, foi o modelo astrofísico para galáxias espirais, o qual permitiu descrever de maneira mais adequada o problema da discrepância entre as curvas de rotação de galáxias espirais obtidas teórica e observacionalmente. Os resultados obtidos para a primeira aproximação pós-newtoniana apresentaram maior precisão dos que os obtidos pela teoria newtoniana. Portanto, foi possível demonstrar que as correções pós-newtonianas desempenham papel relevante no estudo destas estruturas. Para a construção deste modelo, foram considerados conceitos advindos da teoria cinética relativista e da aproximação pós-newtoniana. O modelo teórico foi construído a partir da função distribuição de Maxwell-Jüttner apresentada na seção 4.2. Para isto, as galáxias foram consideradas como um ensemble de partículas, o qual pode ser descrito pela função distribuição mencionada. Em seguida, foi proposto uma descrição macroscópica de quantidades físicas associadas a este sistema, sendo as seguintes quantidades físicas: a energia potencial, a densidade de massa, a pressão e a velocidade circular (seção 4.2). Estes resultados foram analisados e comparados com a teoria newtoniana. Para todas as quantidades físicas mencionadas, os resultados pós-newtonianos apresentaram contribuições maiores que os obtidos pela teoria newtoniana.

Adicionalmente, como já foi discutido nas considerações deste modelo, foram obtidas a expressão para a densidade de energia e os termos da pressão na primeira aproximação pós-newtoniana, e com isto foram obtidas uma solução estática, pela análise das condições de contorno do problema. Com isto, foram obtidos os perfis da densidade de energia, pressão e dos potenciais gravitacionais em termos de uma coordenada radial, através da solução das equações de campo numericamente. Em particular, foi determinada que a densidade de energia tende a zero para valores grandes do raio, mas se aproxima de um valor constante próximo a origem. Este resultado, é contrário ao caso obtido pela distribuição politrópica estudado em [14]. Além disso, o comportamento da velocidade circular para gases ideais determinado aqui, também difere do caso obtido em [14]. Ainda, foi determinado que a energia potencial gravitacional newtoniana é sempre negativa, enquanto que as energias potenciais gravitacionais pós-newtonianas mudam de sinal para grandes valores da distância radial, a partir do centro da configuração.

Com o intuito de resolver o problema da complexidade do raio num determinado

valor e ter um problema de condições de contorno bem definido, foram correlacionados dois diferentes tipos de potenciais gravitacionais em um raio crítico. Adicionalmente, é importante salientar que toda a construção do modelo teórico foi advinda a partir dos princípios fundamentais da Mecânica Estatística. Os resultados obtidos são originais e nos permitiram escrever de maneira alternativa todas as expressões reportadas por Weinberg para a hidrodinâmica.

A partir do modelo teórico bem estabelecido, a motivação física em trabalhar com este assunto foi a escolha de um potencial gravitacional para o qual o comportamento plano nas curvas de rotação para valores grandes do raio fosse reproduzido. Com isso, foi possível mostrar que o primeiro potencial tem a forma de Coloumb enquanto que o outro apresenta dois tipos de termos, uma contribuição Yukawa e outra contribuição logaritmica. Em relação as mudanças introduzidas por estas soluções, foi obtido que o potencial Coloumbiano leva a lei de potência do inverso do quadrado para densidade newtoniana, como era esperado. A partir da correlação entre as soluções foram obtidas as curvas de rotação que foram usadas para a descrição do disco estelar de uma galáxia espiral.

Na sequência, foram adicionados novos componentes ao modelo proposto, ou seja, a descrição do halo de matéria escura, para o qual foi utilizado um perfil de densidade usual na literatura, o perfil de densidade de Burkert [21]. Estas componentes foram adicionadas ao modelo a fim de se obter as curvas de rotação teóricas que melhor representassem os dados observacionais de uma galáxia espiral. Posteriormente, foi feita a comparação entre as curvas teóricas e os dados observacionais para alguns exemplos de galáxias espirais.

Finalmente, as seguintes considerações podem ser feitas destes resultados: primeira-mente, que o modelo proposto aqui apresenta um percentual de 6% às curvas de rotação na primeira aproximação pós-newtoniana comparadas à newtoniana. Com isto, pode-se concluir que as correções pós-newtonianas contribuem de forma relevante às curvas de rotação. Adicionalmente, com base na comparação entre curvas teóricas e os dados observacionais de 9 galáxias espirais, foi possível concluir de maneira qualitativa que o modelo proposto descreve bem dados observacionais de galáxias espirais mais jovens e com a morfologia do tipo SC, como por exemplo, a galáxia espiral NGC 3198. O modelo apresentado descreve bem as curvas de rotação de galáxias mais jovens, ou seja, quanto mais jovem a galáxia de acordo com a classificação de Hubble melhor a descrição apresentada pelo modelo proposto nesta tese. Outro aspecto avaliado qualitativamente, foi a quantidade de massa das galáxias, para esta análise concluiu-se que a massa para todas as galáxias é aproximadamente a mesma e, portanto não tem relação com a descrição do modelo. Por fim, como foi possível inferir a partir das análises das galáxias apresentadas, a maioria delas não apresentou uma boa descrição para o modelo desta tese, ao menos para a análise qualitativa. No entanto, uma análise mais detalhada e quantitativa pode ser realizada com o objetivo de comparar os resultados apresentados aqui, por exemplo, poderia ser feito uma estatística bayesiana.

O segundo modelo proposto foi para a descrição de estruturas estelares. Para este modelo, foram obtidas as equações para a estrutura estelar no contexto da aproximação pós-newtoniana juntamente com a equação de Lane-Emden na primeira aproximação pós-newtoniana. Aqui é importante ressaltar que a equação de Lane-Emden em 1PN difere da obtida em [31]. Para a obtenção da equação de Lane-Emden em 1PN, utilizou-se

das equações de balanço na primeira aproximação pós-newtoniana, também obtidas nesta tese. Em seguida, foram obtidas soluções numéricas para a equação de Lane-Emden newtoniana e pós-newtoniana. A partir das soluções encontradas, foram determinadas, as expressões matemáticas para a pressão, a densidade e a temperatura. Constatou-se que as expressões para estas quantidades físicas dependem estritamente dos valores das correções pós-newtonianas associadas ao modelo proposto. A interpretação desses termos adicionais como correções da teoria newtoniana, foram comparados os resultados obtidos para a aproximação pós-newtoniana com os obtidos pela teoria newtoniana. Com isto, pode-se verificar que nas equações do modelo de estrutura estelar, novos termos relacionados às correções dos potenciais levam a diferentes comportamentos dessas grandezas físicas, como esperado. O comportamento das curvas obtidas para a pressão, densidade, temperatura e relação massa-raio, demonstra que as contribuições pós-newtonianas são relevantes para as grandezas físicas analisadas neste modelo de estrutura estelar, principalmente para estrelas de Nêutrons. As curvas das grandezas físicas analisadas apresentam contribuições pós-newtonianas maiores que a newtoniana. Pode-se dizer, fisicamente que devido ao fato de as estrelas de Nêutrons serem estruturas estelares massivas, com altas densidades e campo gravitacional forte, os efeitos das contribuições adicionadas os campos gravitacionais propostas pela aproximação pós-newtoniana aparecem no comportamento das grandezas físicas. Vale notar que, os resultados obtidos foram os mesmos para todos os exemplos de estrelas de Nêutrons analisados nesta tese. Além disso, é possível justificar que estas sejam características físicas relevantes para a descrição do modelo proposto aqui. Uma vez que, as mesmas análises foram realizadas para um exemplo de Anã Branca, e não houveram contribuições pós-newtonianas nas grandezas físicas analisadas para este caso, ver (apêndice F). Adicionalmente, para o comportamento das curvas analisadas para estrelas como Sol, Anãs Marrons e Gigantes vermelhas os resultados obtidos foram os mesmos que os encontrados para a Anã Branca, indicando novamente que este modelo descreve bem as correções pós-newtonianas para estrelas de alta densidade e com alto campo gravitacional. Por fim, o modelo proposto aqui é simples, mas os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que melhoram a descrição das estruturas estelares em estudo.

Finalmente, é possível concluir que os resultados obtidos e analisados nesta tese são relevantes para a descrição das estruturas astrofísicas que constituem o Universo. Uma vez que, foi possível melhorar as descrições feitas pela teoria newtoniana para os casos apresentados. É possível inferir a partir dos resultados obtidos que as correções relativistas para a teoria newtoniana, obtidas a partir do método da aproximação pós-newtoniana reduzem a quantidade de matéria escura presente nas galáxias. Deixando claro que tais resultados, por si só não são capazes de solucionar o problema como um todo. No entanto, abrem um caminho interessante para se aprofundar. As sugestões para trabalhos futuros são realizar uma análise quantitativa do modelo para galáxias, por exemplo uma análise bayesiana e para os modelos de estruturas estelares uma proposta de modelo considerando uma equação politrópica diferente da usada aqui ou ainda estudar estrelas com campos magnéticos e em rotação.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. Chichester: John Wiley & Sons, (2003).
- [2] P. Collaboration, “Planck early results. xv. spectral energy distributions and radio continuum spectra of northern extragalactic radio sources,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. A15, p. 536, (2011).
- [3] C. Bennett, D. Larson, J. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. Smith, R. Hill, B. Gold, M. Halpern, *et al.*, “Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: final maps and results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, p. 20, 2013.
- [4] M. Zemp, “The stability of the dark matter cusps,” Master’s thesis, The school of the thesis, ETH Zürich, 2003.
- [5] L. Sparke and J. S. G. III, *Galaxies in the Universe*. Cambrigde University Press, (2007).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology, principles and applicationsof the general theory of relativity*. New York: John Wiley and Sons, (1972).
- [7] G. M. Kremer, *An introduction to the Boltzmann equation and Transport Processes in Gases*. New York: Springer, (2010).
- [8] S. Chandrasekhar, “The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 142, p. 1488, (1965).
- [9] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann, “The gravitational equations and the problem of motion,” *Ann. Math.*, vol. 39, p. 65, (1938).
- [10] A. Einstein and L. Infeld, “The gravitational equations and the problem of motion II,” *Ann. Math.*, vol. 41, p. 455, (1940).
- [11] A. Einstein and L. Infeld, *On the motion of particles in general relativity theory*. 1949.
- [12] H. Balasin and D. Grumiller, “Non-newtonian behavior in weak field general relativity for extended rotating sources,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 17, p. 475, (2008).
- [13] V. Rezanian and Y. Sobouti, “Liouville’s equation in post newtonian approximation. I. static solutions,” *Astron, Astrophys.*, vol. 354, p. 1110, (2000).

- [14] C. A. Agón, J. F. Pedraza, and J. Ramos-Caro, “Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases: post-newtonian polytropes,” *Physical Review D*, vol. 83, p. 123007, (2011).
- [15] J. Ramos-Caro, C. A. Agón, and J. F. Pedraza, “Kinetic theory of collisionless self-gravitating gases. II. relativistic corrections in galactic dynamics,” *Physical Review D*, vol. 86, p. 043008, (2012).
- [16] L. Morgan and T. Morgan, “The gravitational field of a disk,” *Phys. Rev.*, vol. 183, p. 1097, (1969).
- [17] P. H. Nguyen and J. F. Pedraza, “Anisotropic models for globular cluster, galactic bulges, and dark halos,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 064020, (2013).
- [18] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*. Basel: Birkhäuser, (2002).
- [19] W. Zimdahl and G. M. Kremer, “Temperature oscillations of a gas in a circular geodesic motion in the schwarzschild field,” *Physical Review D*, vol. 91, p. 024003, (2015).
- [20] G. M. Kremer, M. G. Richarte, and K. Weber, “Self-gravitating systems of ideal gases in the 1PN approximation,” *Physical Review D*, vol. 93, p. 064073, (2016).
- [21] A. Burkert, “The structure of dark matter haloes in dwarf galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 447, p. L25, (1995).
- [22] R. Wagoner and R. C. Malone, “Post-newtonian neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 189, p. L75, (1974).
- [23] H. Shinkai, “Truncated post-newtonian star model,” *Physical Review D*, vol. 60, p. 067504, (1998).
- [24] I. Ciufolini and R. Ruffini, “Equilibrium configurations of neutron stars and the parametrized post-newtonian metric theories of gravitation,” *The Astrophysical Journal*, vol. 275, p. 867, (1983).
- [25] G. A. Carvalho, R. M. M. Jr, and M. Malheiro, “Mass-radius diagram for compact stars,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 630, p. 012058, (2015).
- [26] G. A. Carvalho, R. M. M. Jr, and M. Malheiro, “General relativistic effects in the structure of massive white dwarfs,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 50, p. 38, (2018).
- [27] M. Shibata, K. Oohara, and T. Nakamura, “Numerical study on the hydrodynamic instability of binary stars in the first post-newtonian approximation of general relativity,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 98, p. 1081, (1997).
- [28] M. Shibata, “Instability of synchronized binary neutron stars in the first post-newtonian approximation of general relativity,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 96, p. 317, (1996).

- [29] C. Cutler and L. Lindblom, "Post-newtonian effects on the oscillations of rotating stars," *The Astrophysical Journal*, vol. 385, p. 630, (1992).
- [30] C. Akímushkin, J. Ramos-Caro, and G. A. Gonzalez, "Axially symmetric post-newtonian stellar systems," *Revista Integración*, vol. 28, p. 1, (2010).
- [31] G. Fahlman and S. Anand, "Rapidly rotating polytropes in the post-newtonian approximation to general relativity," *Astrophysics and Space Science*, vol. 12, p. 58, (1970).
- [32] R. Tolmann and P. Ehrenfest, "Temperature equilibrium in a static gravitational field," *Physical Review*, vol. 36, p. 1791, (1930).
- [33] O. Klein, "On the thermodynamical equilibrium of fluids in a gravitational fields," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, p. 531, (1949).
- [34] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of Stellar Structure*. Chicago: University of Chicago Press, (1957).
- [35] R. Tolman, "On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity," *Physical Review*, vol. 35, p. 904, (1930).
- [36] A. Einstein, "Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitatstheorie," *Sitzungsber. preuss.Akad. Wiss.*, vol. 47, p. 831, (1915).
- [37] S. Chandrasekhar, "The post-newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies. I. the maclaurin spheroids and the virial theorem.," *The Astrophysical Journal*, vol. 142, p. 1513, (1965).
- [38] S. Chandrasekhar, "Conservation laws in general relativity and in post newtonian approximations," *The Astrophysical Journal*, vol. 158, p. 45, (1969a).
- [39] S. Chandrasekhar and Y. Nutku, "The second post newtonian equations of hydrodynamics in general relativity," *The Astrophysical Journal*, vol. 158, p. 55, (1969).
- [40] D. C. Backer and R. W. Hellings, "Pulsar timing and general relativity," *Annual review of Astronomy & Astrophysics.*, vol. 24, p. 537, (1969).
- [41] R. Epstein, "The binary pulsar - post-newtonian timing effects," *The Astrophysical Journal*, vol. 216, p. 92, (1977).
- [42] C.M.Will, *In 300 Years of Gravitation*. Cambridge: S. Hawking and W. Israel, (1987).
- [43] C.M.Will, *In proceedings of the eighth Nishinomiya-Yukawa memorial symposium on Relativistic Cosmology*. Tokyo: Universal Academy Press, (1994).
- [44] S. Chandrasekhar and F. P. Esposito, "The 2 1/2 post newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity," *The Astrophysical Journal*, vol. 160, p. 153, (1970).

- [45] R. Epstein, “Gravitational radiation damping of slowly moving systems calculated using matched asymptotic expansions,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12, p. 401, (1971).
- [46] T. Damour and D. Vokrouhlicky, “Conservation laws for systems of extended bodies in the
rst post-newtonian approximation,” *Phys.Rev*, vol. D52, p. 4455, (1995).
- [47] L. Blanchet and T. Damour, “Post-newtonian generation of gravitational waves,” *Ann. Inst. Henri Poincare*, vol. 50, p. 377, (1989).
- [48] L. Blanchet, “Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries,” *Living Rev. Relativity*, vol. 2, p. 17, (2014).
- [49] L. Blanchet, T. Damour, and G. Schaefer, “Post-newtonian hydrodynamics and post-newtonian gravitational wave generation for numerical relativity,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 289, p. 242, (1990).
- [50] G. Bertin, *Dynamics of Galaxies*. New York: Cambrigde University Press, (2014).
- [51] E. P. Hubble, *The Realm of Nebulae*. London: New Haven Yale University press, (1936).
- [52] A. Sandage, *The Hubble Atlas of Galaxies*. Washington: Carnegie Institution of Washington, (1961).
- [53] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. England: Jonh Wiler & Sons LTD, (2002).
- [54] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*. Princeton: Princeton University Press, (2008).
- [55] O. S. Kepler and M. Oliveira, *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo: Livraria da Física, (2004).
- [56] N. A. Chernikov, “The relativistic gas in the gravitational field,” *Acta Phys. Pol.*, vol. 23, p. 629, (1963).
- [57] J. Ehlers, *General relativity and kinetic theory, in General relativity and cosmology*. Course XLVII ed. R. K. Sachs, (1969).
- [58] L. Bel, “Kinetic theory of cosmology,” *Ap. J.*, vol. 83, p. 155, (1969).
- [59] W. Israel, *The relativistic Boltzmann equation*. Oxford: ed. L. O’Raifeartaigh. Clarendon Press, (1972).
- [60] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C.Trachternach, S. Oh, and R. C. J. Ken-
nicutt, “High-resolution rotation curves and galaxy mass models from THINGS,” *The Astrophysical Journal*, vol. 136, p. 2648, (2008).

- [61] E. Karukes, P. Salucci, and G. Gentile, “The dark matter distribution in the spiral NGC 3198 out to $0.22 R_{vir}$,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 578, p. A13, (2015).
- [62] P. Salucci and A. Burkert, “Dark matter scaling relations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 537, p. L9, (2000).
- [63] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, “The structure of cold dark matter halos,” *The Astrophysical Journal*, vol. 462, p. 563, (1996).
- [64] P. Salucci, A. Lapi, C. Tonini, I. Yegorova, and U. Klein, “The universal rotation curve of spiral galaxies. II. the dark matter distribution out to the virial radius,” *MNRAS*, vol. 41, p. 378, (2007).
- [65] F. Walter, E. Brinks, W. de Blok, F. Bigiel, R. C. K. J. M. D. Thornley, and A. K. Leroy, “THINGS: The HI nearby galaxy survey,” *The Astrophysical Journal*, vol. 136, p. 85, (2008).
- [66] K. Begeman, *HI rotation curves of spiral galaxies*. PhD thesis, University of Groningen, Groningen, 1987.
- [67] C. Carignan, L. Chemin, W. K. Huchtmeie, and F. J. Lockman, “The extended HI rotation curve and mass distribution of M31,” *The Astrophysical Journal*, vol. 641, p. 4, (2006).
- [68] E. Corbelli, D. Thilker, S. Zibetti, C. Giovanardi, and P. Salucci, “Dynamical signatures of a λ cdm-halo and the distribution of the baryons in M33,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 572, p. A23, (2014).
- [69] M. Cheriguene, “La dynamique des galaxies spirales,” *Colloques Internationaux du CNRS*, vol. 241, p. 439, 1975.
- [70] A. D. Hunter, V. C. Rubin, and J. S. G. III, “Optical rotation velocities and images of the spiral galaxy NGC 3198,” *The Astrophysical Journal*, vol. 1086, p. 91, (1986).
- [71] R. Bottema, “The stellar kinematics of the spiral galaxies NGC 3198 and NGC 3938,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 197, p. 105, (1988).
- [72] B. Wevers, P. van der Kruit, and R. J. Allen, “The palomar-westerbork survey of northern spiral galaxies,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 505, p. 66, (1986).
- [73] S. M. Kent, “Dark matter in spiral galaxies. i. galaxies with optical rotation curves,” *The Astrophysical Journal*, vol. 91, p. 1301, (1986).
- [74] R. L. M. Corradi, J. Boulesteix, A. Bosma, P. Amram, and M. Capaccioli, “H-alpha morphology and kinematics of the spiral galaxy NGC 3198,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 244, no. 2, p. 27, (1991).
- [75] O. Daigle, C. Carignan, P. Amram, O. Hernandez, L. Chemin, C. Balkowski, and R. Kennicutt, “H-alpha kinematics of the SINGS nearby galaxies survey: I,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 367, p. 433, (2006).

- [76] G. Gentile, G. I. G. Józsa, P. Serra, G. H. Heald, W. J. G. de Blok, F. Fraternali, M. T. Patterson, R. A. M. Walterbos, and T. Oosterloo, “HALOGAS: Extraplanar gas in NGC 3198,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 554, p. A125, (2013).
- [77] G. Heald, G. Józsa, P. Serra, L. Zschaechner, R. Rand, F. Fraternali, T. Oosterloo, , R. Walterbos, E. Jütte, and G. Gentile, “The westerbork hydrogen accretion in local galaxies(HALOGAS) survey I. survey description and pilot observations,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 526, p. A118, (2011).
- [78] N. C. Amorisco and G. Bertin, “Self-consistent nonspherical isothermal halos embedding zero-thickness disks,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. A47, p. 519, (2010).
- [79] M. Persic and P. Salucci, “Galaxy rotation curves: Dynamical signatures of the disk and the halo,” *Astrophysical Letters and Communications*, vol. 28, p. 307, (1992).
- [80] L. Chemin, W. De Blok, and G. A. Mamon, “Improved modeling of the mass distribution of disk galaxies by the einasto halo model,” *The Astronomical Journal*, vol. 142, no. 4, p. 109, 2011.
- [81] F. Lelli, S. S. McGaugh, and J. M. Shombert, “Sparc: Mass models for 175 disk galaxies with spitzer photometry and accurate rotation curves,” *The Astrophysical Journal*, p. 7, (2016).
- [82] P. van der Kruit and K. Freeman, “Galaxy disks,” *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, vol. 49, p. 301, (2011).
- [83] K. Fathi, M. Allen, T. Boch, E. Hatziminaoglou, and R. Peletier, “Scalelength of disc galaxies,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 406, p. 1595, (2010).
- [84] V. C. Rubin, E. M. B. and G. R. Burbidge, D. J. Crampin, and K. H. Prendergast, “The rotation and mass of ngc 7331,” *The Astrophysical Journal*, vol. 140, p. 80, (1964).
- [85] K. G. Begeman, “H I rotation curves of spiral galaxies. I-NGC 3198,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 223, p. 47, (1989).
- [86] P. D. Mannheim and J. G. O’Brien, “Fitting galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential,” *Physical Review D*, vol. 85, p. 124020, (2012).
- [87] P. Hodge, *The Andromeda Galaxy*. Dordrecht: Kluwer: Springer, (1992).
- [88] F. D. A. Hartwick and W. L. W. Sargent, “The mass of M31 as determined from the motions of its globular clusters,” *The Astrophysical Journal*, vol. 190, p. 283, (1974).
- [89] S. van der Bergh, “The mass of M31,” *Astronomical Society of the Pacific*, vol. 93, p. 428, (1981).

- [90] H. R. Merrett, K. Kuijken, M. R. Merrifield, A. J. Romanowsky, N. G. Douglas, N. R. Napolitano, M. Arnaboldi, M. Capaccioli, K. C. Freeman, O. Gerhard, N. W. Evans, M. I. Wilkinson, C. Halliday, T. J. Bridges, and D. Carter, “Tracing the star stream through M31 using planetary nebula kinematics,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 346, p. L62, (2003).
- [91] M. S. Roberts and R. N. Whitehurst, “The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances,” *The Astrophysical Journal*, vol. 201, p. 327, (1975).
- [92] D. T. Emerson, “High resolution observations of neutral hydrogen in M31,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 176, p. 321, (1976).
- [93] E. Brinks and W. W. Shane, “A high resolution hydrogen line survey of messier 31. I observations and data reduction,” *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, vol. 55, p. 179, (1984).
- [94] E. Brinks and W. W. Shane, “The interstellar medium of M31. I. a survey of neutral hydrogen emission,” *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, vol. 72, p. 755, (1990).
- [95] D. A. Thilker, R. Braun, R. A. M. Walterbos, E. Corbelli, F. J. Lockman, E. Murphy, and R. Maddalena, “The interstellar medium of M31. I. a survey of neutral hydrogen emission,” *The Astrophysical Journal*, vol. 601, p. L39, (2004).
- [96] R. Stoyan, S. Binnewies, S. Friedrich, and K.-P. Schroeder, *Atlas of the Messier Objects: Highlights of the Deep Sky*. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (2008).
- [97] G. Battaglia, F. Fraternali, T. Oosterloo, and R. Sancisi, “Hi study of the warped spiral galaxy NGC5055: a disk/dark matter halo offset?,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 3210, p. 447, (2006).
- [98] F. Fraternali, G. van Moorsel, R. Sancisi, and T. Oosterloo, “Deep HI survey of the spiral galaxy NGC 2403,” *The Astrophysical Journal*, vol. 123, p. 3124–3140, (2008).
- [99] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, (2012).
- [100] B. Kiziltan, *Reassessing the Fundamentals: On the Evolution, Ages and Masses of Neutron Stars - Dissertation.com*. Florida: Universal Publishers, (2011).
- [101] N. Chamel, J. L. Zdunik, and A. F. Fantina, “On the maximum mass of neutron stars,” *International Journal of Modern Physics*, vol. 22, p. 1330018, (2013).
- [102] F. Özel, D. Psaltis, R. Narayan, and A. S. Villarreal, “On the mass distributions and birth mass of neutron stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 757, p. 55, (2012).

- [103] G. Fontaine, P. Brassard, and P. Bergeron, “The potential of white dwarf cosmochronology,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 113, p. 409, (2001).
- [104] S. O. Kepler, S. J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B. G. C. and O. Giovannini, A. F. M. Costa, and L. Althaus, “White dwarf mass distributions in the sdss,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 375, p. 1315, (2007).
- [105] M. Kilic, C. A. P. anad Warren R. Brown, and D. Koester, “The lowest mass white dwarf,” *The Astrophysical Journal*, vol. 600, p. 1451, (2007).
- [106] H. L. Shipman, “Masses and radii of white dwarfs stars. III - results for non hydrogen-rich and 28 helium-rich stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 228, p. 240, (1979).
- [107] A. S. Eddington, “On the relation between the masses and luminosities of the stars,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 84, p. 308, (1924).
- [108] S. Chandrasekhar, “The maximum mass of ideal white dwarfs.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 81, (1931).
- [109] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, “Cosmic black-body radiation.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 142, p. 414, 1965.
- [110] S. Capozziello, M. D. Laurentis, S. Odintsov, and A. Stabile, “Hydrostatic equilibrium and stellar structure in $f(r)$ -gravity,” *Physic Review D*, vol. 83, p. 064004, (2011).
- [111] E. L. Schatzman and F. Praderie, *The Stars*. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, (1993).
- [112] R. André and G. Kremer, “Stellar structure model in hydrostatic equilibrium in the context of $f(R)$ -gravity,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 17, p. 122, (2017).
- [113] R. André, *Análise da instabilidade de Jeans em sistemas auto-gravitantes e um modelo de estrutura estelar no contexto da teoria de gravidade $f(R)$* . PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba Paraná, 2017.
- [114] G. P. Horedt, *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (2004).
- [115] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge: Cambridge University Press, (1926).
- [116] R. F. Tooper, “The ”standard model”for massive stars in general relativity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 143, p. 465, (1965).
- [117] R. S. Lynch, J. B. Scott, M. Ransom, I. H. Stairs, D. Lorimer, M. A. McLaughlin, J. Hessels, V. Kaspi, V. Kondratiev, A. Archibald, A. Berndsen, R. Cardoso, A. Cherry, C.R.Epstein, C. Karako-Argaman, C. McPhee, T. Pennucci, M. Roberts,

- K. Stovall, and J. Leeuwen, “The green bank telescope 350 mhz drift-scan survey ii: Data analysis and the timing of 10 new pulsar. including a relativistic binary,” *The Astrophysical Journal*, vol. 763, p. 81, (2013).
- [118] B. Hong, H.-Y. Jia, X.-L. Mu, and X. Zhou, “Influence of entropy on composition and structure of massive protoneutron stars,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 66, p. 224, (2016).
- [119] J. Antoniadis, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, R. S. Lynch, M. H. van Kerkwijk, M. Kramer, C. Bassa, V. Dhillon, T. Driebe, J. W. T. Hessels, V. M. Kaspi, V. I. Kondratiev, N. Langer, T. R. Marsh, M. A. McLaughlin, T. T. Pennucci, S. Ransom, I. Stairs, J. van Leeuwen, J. P. W. Verbiest, and D. G. Whelan, “A massive pulsar in a compact relativistic binary,” *Science*, vol. 340, p. 1233232, (2013).
- [120] F. Fraternali, G. van Moorsel, R. Sancisi, and T. Oosterloo, “A massive neutron star in the globular cluster M5,” *The Astrophysical Journal*, vol. 679, p. 1433, (2002).
- [121] M. C. Miller, “The case for psr j1614-2230 as a nicer target,” *The Astrophysical Journal*, vol. 822, p. 77, (2016).
- [122] W. Dehnen, “A family of potential-density pairs for spherical galaxies and bulges,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2, vol. 265, p. 250, (1993).
- [123] L. Hernquist, “Evolution of stars of small masses in the pre-main-sequence stages,” *The Astrophysical Journal*, vol. 256, p. 359, (1990).

A INTEGRAIS GAUSSIANNAS

Vamos resumir os casos das integrais utilizadas neste trabalho. Apenas para tornar mais familiar, vamos considerar a integração sobre um espaço 3D associado a uma velocidade peculiar definida como $W_* = (w^*, \theta, \phi) : 0 \leq w^* \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$, onde w^* é a velocidade adimensional peculiar e o elemento de volume é dado por $d^3W^* = w^{*2}dw^*d\Omega_2$ com $d\Omega_2$ o elemento de ângulo sólido bidimensional. Considerando a distribuição Gaussiana $F(w^*) = e^{-w^{*2}/2}$ então, tem-se as seguintes expressões:

$$I_0 = \int e^{\frac{-w^{*2}}{2}} d^3W^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{A.1})$$

$$I_2 = \int w^{*2} e^{\frac{-w^{*2}}{2}} d^3W^* = 12\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{A.2})$$

$$I_4 = \int w^{*4} e^{\frac{-w^{*2}}{2}} d^3W^* = 60\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$I_6 = \int w^{*6} e^{\frac{-w^{*2}}{2}} d^3W^* = 420\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Usando as equações (A.2), (A.3) e (A.4) podemos provar que as seguintes expressões seguem (ver [7]):

$$\int F(w^*) w_i^* w_j^* d^3W^* = \frac{I_2}{3} \delta_{ij}, \quad (\text{A.5})$$

$$\int F(w^*) w_i^* w_j^* w_k^* w_l^* d^3W^* = \frac{I_4}{15} [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}], \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \int F(w^*) w_i^* w_j^* w_k^* w_l^* w_m^* w_n^* d^3W^* = & \left[\frac{I_6}{105} \right] \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} \\ & + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} \\ & + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

B EQUAÇÃO DE JEANS EM 1PN

Neste apêndice será demonstrada a obtenção da equação de Jeans para simetria esférica e axi-simétrica. Estes resultados são apenas a obtenção das equações teóricas.

Sistema Esférico

A equação de Jeans é descrita pela dispersão da velocidade radial para um sistema autogravitante esfericamente simétrico e estacionário.

Neste caso, a velocidade média do sistema - a qual é a velocidade hidrodinâmica - é considerada igual a zero, e a função distribuição em 1PN (5.35) se reduz a,

$$f = f_0 \left[1 - \frac{15kT}{8mc^2} - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3v^4}{8} - 2\phi v^2 \right) \right], \quad f_0 = \frac{n}{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad (\text{B.1})$$

onde f_0 é a função distribuição Maxwelliana.

Para um sistema simetricamente esférico e estacionário ${}^3T^{0i}$ zeram de acordo com [6] e a equação de Poisson (3.22) para o potencial ξ^i se reduz a ${}^2\xi^i = 0$. Neste caso, é considerado que ξ^i é identicamente igual a zero. A equação para a velocidade de dispersão radial $\sqrt{\langle v_r^2 \rangle}$ é obtida a partir da multiplicação da equação de Boltzmann em coordenadas esféricas (C.5) por $m^4 v_r u_0 / c$ e integrando o resultado da equação levando em conta o elemento invariante (5.36), obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ \rho \left[\langle v_r^2 \rangle + \frac{3}{c^2} \langle v_r^2 v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r^2 \rangle - \frac{15kT}{8c^2 m} \langle v_r^2 \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_r^2 v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r^2 v^2 \rangle \right) \right] \right\} - \frac{\rho}{r} \{ \langle v_\theta^2 \rangle + \langle v_\varphi^2 \rangle \\ - 2\langle v_r^2 \rangle + \frac{3}{c^2} (\langle v_\theta^2 v^2 \rangle + \langle v_\varphi^2 v^2 \rangle - 2\langle v_r^2 v^2 \rangle) - \frac{8}{c^2} \phi (\langle v_\theta \rangle + \langle v_\varphi \rangle - 2\langle v_r \rangle) - \frac{15kT}{8mc^2} (\langle v_\theta \rangle + \langle v_\varphi \rangle - 2\langle v_r \rangle) \\ - \frac{m}{kTc^2} \left[\frac{3}{8} (\langle v_\theta^2 v^4 \rangle + \langle v_\varphi^2 v^4 \rangle) - 2\langle v_r^2 v^4 \rangle - 2\phi \langle v_\theta^2 v^2 \rangle + \langle v_\varphi^2 v^2 \rangle - 2\langle v_r^2 v^2 \rangle) \right] \} - \frac{\rho}{r} \cot \theta \{ \langle v_r v_\theta \rangle \\ + \frac{3}{c^2} \langle v_r v_\theta v^2 \rangle + \frac{6}{c^2} \langle v_r v_\theta v_\varphi^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r v_\theta \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_r v_\theta \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left[\frac{3}{8} \langle v_r v_\theta v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r v_\theta v^2 \rangle \right] \} \\ + \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 + \frac{4}{c^2} \langle v^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \langle v_r^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \phi \frac{15kT}{8c^2 m} - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v^4 \rangle - 2\phi \langle v^2 \rangle \right) \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Note que a hipótese do sistema esfericamente simétrico implica que os potenciais e a função distribuição não dependem dos ângulos θ e φ , mas somente de r . Em (B.2),

os valores médios são definidos por:

$$\rho = \int m^4 f_0 d^3v, \quad \rho \langle v^n v_r^2 \rangle = \int m^4 v^n v_r^2 f_0 d^3v, \quad (\text{B.3})$$

e assim por diante.

Os valores médios na equação (B.2) podem ser expressos em termos de $\langle v_r^2 \rangle$, $\langle v_\theta^2 \rangle$ e $\langle v_\varphi^2 \rangle$ através da integração pelo uso da função distribuição Maxwelliana, resultando em

$$\langle v^2 \rangle = 3 \frac{kT}{m}, \quad \langle v^4 \rangle = 15 \left(\frac{kT}{m} \right)^2, \quad \langle v^2 v_r^2 \rangle = 5 \frac{kT}{m} \langle v_r^2 \rangle, \quad \langle v^4 v_r^2 \rangle = 35 \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \langle v_r^2 \rangle, \quad (\text{B.4})$$

$$\langle v^2 v_\theta^2 \rangle = 5 \frac{kT}{m} \langle v_\theta^2 \rangle, \quad \langle v^4 v_\theta^2 \rangle = 35 \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \langle v_\theta^2 \rangle, \quad \langle v^2 v_\varphi^2 \rangle = 5 \frac{kT}{m} \langle v_\varphi^2 \rangle, \quad \langle v^4 v_\varphi^2 \rangle = 35 \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \langle v_\varphi^2 \rangle, \quad (\text{B.5})$$

$$\langle v_r v_\theta \rangle = \langle v_r v_\theta v^2 \rangle = \langle v_r v_\theta v^4 \rangle = \langle v_r v_\theta v_\varphi^2 \rangle = 0. \quad (\text{B.6})$$

Considerando os resultados acima, a equação (B.2) pode ser expressa como uma função de $\langle v_r^2 \rangle$, $\langle v_\theta^2 \rangle$ e $\langle v_\varphi^2 \rangle$, e com isso a equação de Jeans na primeira aproximação pós-Newtoniana é obtida:

$$\frac{d}{dr} \left[\rho \langle v_r^2 \rangle \left(1 + \frac{2}{c^2} \right) \right] + 2\rho \frac{\beta \langle v_r^2 \rangle}{r} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) + \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{4}{c^2} \langle v_r^2 \rangle + \frac{9}{2} \frac{kT}{mc^2} \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Para a equação (B.7) ser escrita é introduzido o parâmetro de velocidade anisotrópica $\beta = 1 - \langle v_\theta^2 \rangle / \langle v_r^2 \rangle$, e assumindo que $\langle v_\theta^2 \rangle = \langle v_\varphi^2 \rangle$.

Os potenciais gravitacionais na equação de Jeans (B.7) são determinados pelas equações de Poisson (3.22), nas quais as componentes do tensor energia-momento são conhecidas. Como já visto anteriormente, para isso a função distribuição (5.35) é inserida juntamente com o elemento de integração invariante (5.36) na definição do tensor energia-momento (4.11) e da integração da equação resultante, obtém-se

$${}^0T^{00} + {}^2T^{00} = \rho c^2 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3kT}{2m} - 2\phi \right) \right], \quad {}^2T^{rr} = \rho \langle v_r^2 \rangle, \quad {}^2T^{\theta\theta} = \rho \langle v_\theta^2 \rangle, \quad {}^2T^{\varphi\varphi} = \rho \langle v_\varphi^2 \rangle. \quad (\text{B.8})$$

Levando em conta (B.8) e as equações de Poisson (3.22) em coordenadas esféricas, com $\phi = \phi(r)$ e $\psi = \psi(r)$ tem-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho, \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G\rho \left[\langle v_r^2 \rangle (3 - 2\beta) - 2\phi + \frac{3kT}{2m} \right]. \quad (\text{B.9})$$

A equação de Jeans (B.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\rho \langle v_r^2 \rangle}{dr} + 2\rho \frac{\beta \langle v_r^2 \rangle}{r} + \rho \frac{d\phi}{dr} \left[1 - \frac{2}{c^2} \langle v_r^2 \rangle + \frac{9}{2} \frac{kT}{mc^2} \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad (\text{B.10})$$

até a ordem de $1/c^2$.

Com o objetivo de resolver o sistema de equações diferenciais formado pelas equações de Poisson adimensionais (B.9) e a equação de Jeans (B.11), as seguintes variáveis adimensionais são introduzidas:

$$\sigma_r^2 = \frac{m}{kT} \langle v_r^2 \rangle, \quad \tilde{\phi} = \frac{m}{kT} \phi, \quad \tilde{\psi} = \frac{m^2}{k^2 T^2} \psi, \quad \zeta = \frac{mc^2}{kT}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\frac{4mG\rho_0}{kT}} r. \quad (\text{B.11})$$

Aqui, ρ_0 se refere a densidade de massa e ζ o parâmetro relativista, o qual depende da temperatura do sistema e da razão da energia em repouso da partícula pela energia térmica do sistema. Em termos das quantidades adimensionais definidas acima, as equações de Poisson (B.9) e a equação de Jeans (B.11), se tornam:

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(r^2 \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} \right) = 4\pi G \rho, \quad \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(r^2 \frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{r}} \right) = 4\pi G \rho \left[\langle v_r^2 \rangle (3 - 2\beta) - 2\phi + \frac{3kT}{2m} \right]. \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_r^2 = \frac{m}{kT} \langle v_r^2 \rangle, \quad \tilde{\phi} = \frac{m}{kT} \phi, \quad \tilde{\psi} = \frac{m^2}{k^2 T^2} \psi, \quad \zeta = \frac{mc^2}{kT}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\frac{4mG\rho_0}{kT}} r. \quad (\text{B.13})$$

Para um dado perfil de densidade de massa e o parâmetro relativista é possível resolver as equações diferenciais acima.

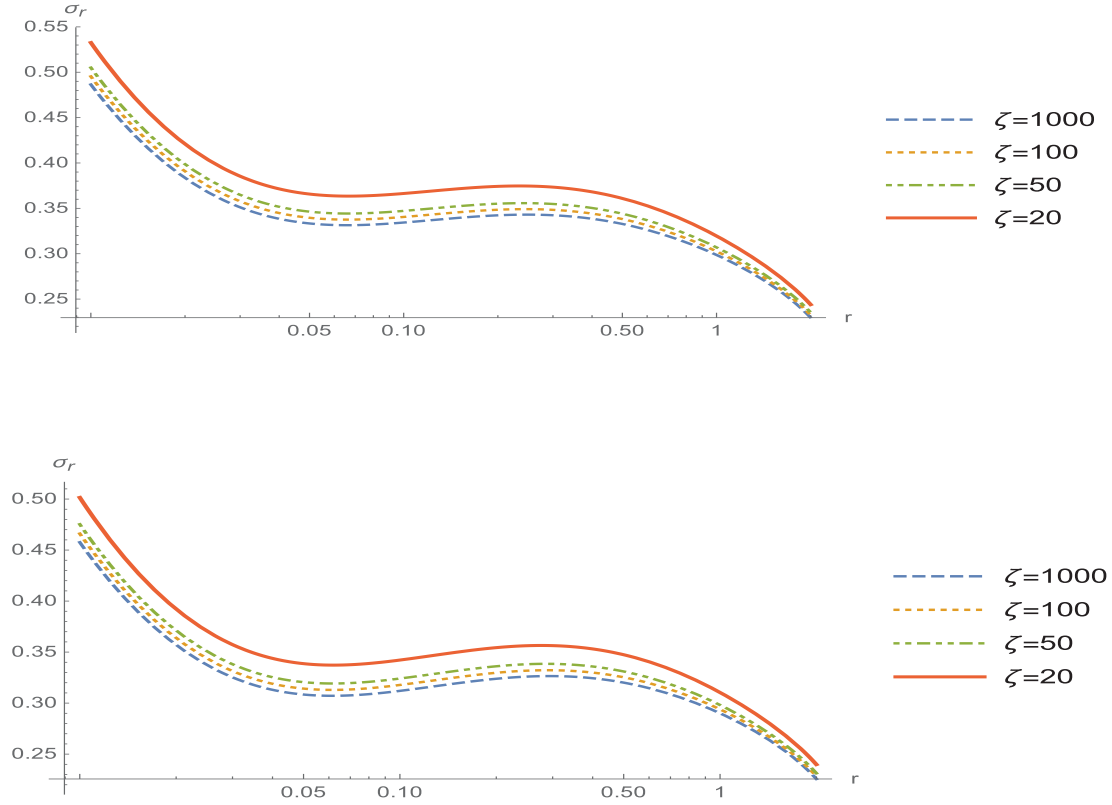
Como um exemplo, foi escolhido um perfil dado em [54]:

$$\tilde{\rho} = \frac{2}{r(r^3 + 1)}, \quad \tilde{\phi} = -\frac{1}{r+1} - \frac{\mu}{r}, \quad (\text{B.14})$$

e resolvendo numericamente o sistema de equações com as condições de contorno: $\sigma_r(3) = 0.1$, $\psi(3) = 0$, $d\tilde{\psi}/d\tilde{r} = 0$ e com $\mu = 0.004$, para os dois valores de $\beta = 0.05$ e $\beta = -0.05$, para diferentes valores de ζ . O perfil de densidade escolhido neste exemplo, é o perfil de densidade de Dehnen [122] usado para descrever galáxias esféricas e bojos de galáxias.

As curvas da figura abaixo, são as soluções numéricas deste sistema.

Figura B.1: Dispersão da velocidade em função de r para $\beta = 0.05$ e $\beta = -0.05$.



Nas curvas da figura acima, a curva em azul é a curva para a velocidade de dispersão Newtoniana $\zeta = 1000$, e as pós-Newtonianas para $\zeta = 100$, $\zeta = 50$ e $\zeta = 20$ estão representadas pelas curvas laranja, verde e vermelha, respectivamente. Nesta análise as correções pós-Newtonianas também são maiores que a Newtoniana.

As curvas para a dispersão de velocidades obtidas aqui a partir das equações de Jeans na aproximação pós-Newtoniana, podem ser usadas para avaliar o impacto de um buraco negro maciço central no perfil velocidade-dispersão de uma galáxia hospedeira, por exemplo, como foi mostrado em [54]. No exemplo mencionado, foi utilizado o modelo de Hernquist [123]. As curvas obtidas nesta tese mostram que as contribuições pós-Newtonianas são maiores que a Newtoniana. Uma proposta mais elaborada pode ser realizada a partir dos resultados encontrados aqui, como alternativa para o estudo da velocidade de dispersão de buracos negros e/ou aglomerados de galáxias.

Sistema Axi-Simétrico

A partir da multiplicação da equação de Boltzmann em coordenadas cilíndricas (D.4) por $m^4 v_r u^0 / c$ e integrando, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho \left[\langle v_r^2 \rangle + \frac{3}{c^2} \langle v_r^2 v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r^2 \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_r^2 \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_r^4 \rangle - 2\phi \langle v_r^2 v^2 \rangle \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho [\langle v_r v_z \rangle \right. \\ & + \frac{3}{c^2} \langle v_r v_z v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r v_z \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_r v_z \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_r v_z v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r v_z v^2 \rangle \right) \left. \right] + \frac{\rho}{r} \left\{ \frac{3}{c^2} (\langle v_r^2 v^2 \rangle \right. \\ & - \langle v_\varphi^2 v^2 \rangle) + (\langle v_r^2 \rangle - \langle v_\varphi^2 \rangle) \left(1 - 8\frac{\phi}{c^2} - \frac{15kT}{8mc^2} \right) - \frac{m}{kTc^2} \left[\frac{3}{8} (\langle v_r^2 v^4 \rangle - \langle v_\varphi^2 v^4 \rangle) - 2\phi \langle v_r^2 v^2 \rangle - \langle v_\varphi^2 v^2 \rangle \right] \left. \right\} \\ & - \frac{4}{c^2} \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \langle v_z v_r \rangle + \rho \frac{\partial \phi}{\partial r} \left[1 + \frac{4}{c^2} \langle v^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \langle v_r^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \phi - \frac{15kT}{8mc^2} - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v^4 \rangle - 2\phi \langle v^2 \rangle \right) \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Ou ainda, da multiplicação da equação de Boltzmann em coordenadas cilíndricas (D.4) por $m^4 v_z u^0 / c$ e integrando, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho \left[\langle v_z^2 \rangle + \frac{3}{c^2} \langle v_z^2 v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_z^2 \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_z^2 \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_z^4 \rangle - 2\phi \langle v_z^2 v^2 \rangle \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho [\langle v_r v_z \rangle \right. \\ & + \frac{3}{c^2} \langle v_r v_z v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r v_z \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_r v_z \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_r v_z v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r v_z v^2 \rangle \right) \left. \right] + \frac{\rho}{r} \{ \langle v_z v_r \rangle \\ & \left(1 - \frac{8\phi}{c^2} - \frac{15kT}{8mc^2} \right) + \frac{3}{c^2} \langle v_r v_z v^2 \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left[\frac{3}{8} \langle v_r v_z v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r v_z v^2 \rangle \right] \left. \right\} - \frac{4}{c^2} \rho \frac{\partial \phi}{\partial r} \langle v_r v_z \rangle + \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ & + \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[1 + \frac{4}{c^2} \langle v^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \langle v_z^2 \rangle - \frac{4}{c^2} \phi - \frac{15kT}{8mc^2} - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v^4 \rangle - 2\phi \langle v^2 \rangle \right) \right] \quad (\text{B.16}) \end{aligned}$$

E, da multiplicação da equação de Boltzmann em coordenadas cilíndricas (D.4) por $m^4 v_\varphi u^0 / c$ e integrando, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho \left[\langle v_r v_\varphi \rangle + \frac{3}{c^2} \langle v_r v_\varphi v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_r v_\varphi \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_r v_\varphi \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_r v_\varphi v^4 \rangle - 2\phi \langle v_r v_\varphi v^2 \rangle \right) \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho \left[\langle v_z v_\varphi \rangle + \frac{3}{c^2} \langle v_z v_\varphi v^2 \rangle - \frac{8}{c^2} \phi \langle v_z v_\varphi \rangle - \frac{15kT}{8mc^2} \langle v_z v_\varphi \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left(\frac{3}{8} \langle v_z v_\varphi v^4 \rangle - 2\phi \langle v_z v_\varphi v^2 \rangle \right) \right] \right\} \\ & + \frac{\rho}{r} \left\{ \langle v_r v_\varphi \rangle \left(1 - \frac{8\phi}{c^2} - \frac{15kT}{8mc^2} \right) + \frac{3}{c^2} \langle v_z v_\varphi v^2 \rangle - \frac{m}{kTc^2} \left[\frac{3}{8} \langle v_z v_\varphi v^4 \rangle - 2\phi \langle v_z v_\varphi v^2 \rangle \right] \right\} \\ & - \frac{4}{c^2} \rho \frac{\partial \phi}{\partial r} \langle v_r v_\varphi \rangle - \frac{4}{c^2} \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \langle v_z v_\varphi \rangle. \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

Considerando que os momentos ímpares zeram na equação (B.17) se tornam triviais e as equações (B.15) e (B.16), se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho \langle v_r^2 \rangle \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] + \frac{\rho (\langle v_r^2 \rangle - \langle v_\varphi^2 \rangle)}{r} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial r} \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{4}{c^2} \langle v_r^2 \rangle + \frac{9kT}{2mc^2} \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \langle v_z^2 \rangle \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \right] + \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{4}{c^2} \langle v_z^2 \rangle + \frac{9kT}{2mc^2} \right]. \quad (\text{B.19})$$

C EQUAÇÃO DE BOLTZMANN: COORDENADAS ESFÉRICAS

Para escrever a equação de Boltzmann em coordenadas esféricas são usadas as seguintes relações entre as coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) e as coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta, \quad (\text{C.1})$$

e as relações entre as velocidades (v^1, v^2, v^3) em coordenadas cartesianas em relação às coordenadas esféricas $(v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}, v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi})$:

$$\begin{aligned} v^1 &= v_r \sin \theta \cos \varphi + v_\theta \cos \theta \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \\ v^2 &= v_r \sin \theta \sin \varphi + v_\theta \cos \theta \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \\ v^3 &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

A relação entre a derivada tempo-material da função distribuição $f = f(t, r, \theta, \varphi, v_r, v_\theta, v_\varphi)$ em coordenadas esféricas é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial v_r} \dot{v}_r + \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \dot{v}_\theta + \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \dot{v}_\varphi, \quad (\text{C.3})$$

a equação (C.3) implica em

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \\ &\quad \left(\frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \left(\frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Portanto, a equação de Boltzmann (5.30) em coordenadas esféricas é dada por:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2}\right) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \left(\frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \right. \\
& - \left. \left(\frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right] - \left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} - \frac{3\phi}{c^2}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial v_r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \\
& \frac{1}{c^2} \left\{ 3 \left(v_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + v_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + v_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right) \frac{\phi}{\partial t} + 4 \left(v_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + v_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + v_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right) \left(v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right. \\
& - \left(\frac{\partial f}{\partial v_r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial f}{\partial v_r} \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} \right) + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} \right) \right. \\
& - \left. \left. \frac{v_\theta \xi_\theta + v_\varphi \xi_\varphi}{r} \right] - \frac{\partial f}{\partial v_\theta} \left[\frac{\partial \xi_\theta}{\partial t} - \frac{v_r}{r} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - r \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} \right) + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_r \xi_\theta - v_\varphi \xi_\varphi \cot \theta}{r} \right] - \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \\
& \left. \left[\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t} - \frac{v_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - r \sin \theta \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_r \xi_\varphi + v_\theta \xi_\varphi \cot \theta}{r} \right] \right\} = Q(f, f).
\end{aligned}
\tag{C.5}$$

D EQUAÇÃO DE BOLTZMANN: COORDENADAS CILÍNDRICAS

As relações entre as coordenadas cartesianas (x^1, x^2, x^3) e as coordenadas cilíndricas (r, φ, z) são:

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi, \quad x^3 = z, \quad (\text{D.1})$$

enquanto que as relações entre as velocidades (v^1, v^2, v^3) em coordenadas cartesianas em relação às coordenadas cilíndricas são:

$$v^1 = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v^2 = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \quad v^3 = z, \quad (\text{D.2})$$

onde $v_r = \dot{r}$ e $v_\varphi = r\dot{\varphi}$.

A derivada tempo-material da função distribuição $f = f(t, r, \theta, \varphi, v_r, v_\theta, v_\varphi)$ em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi}. \quad (\text{D.3})$$

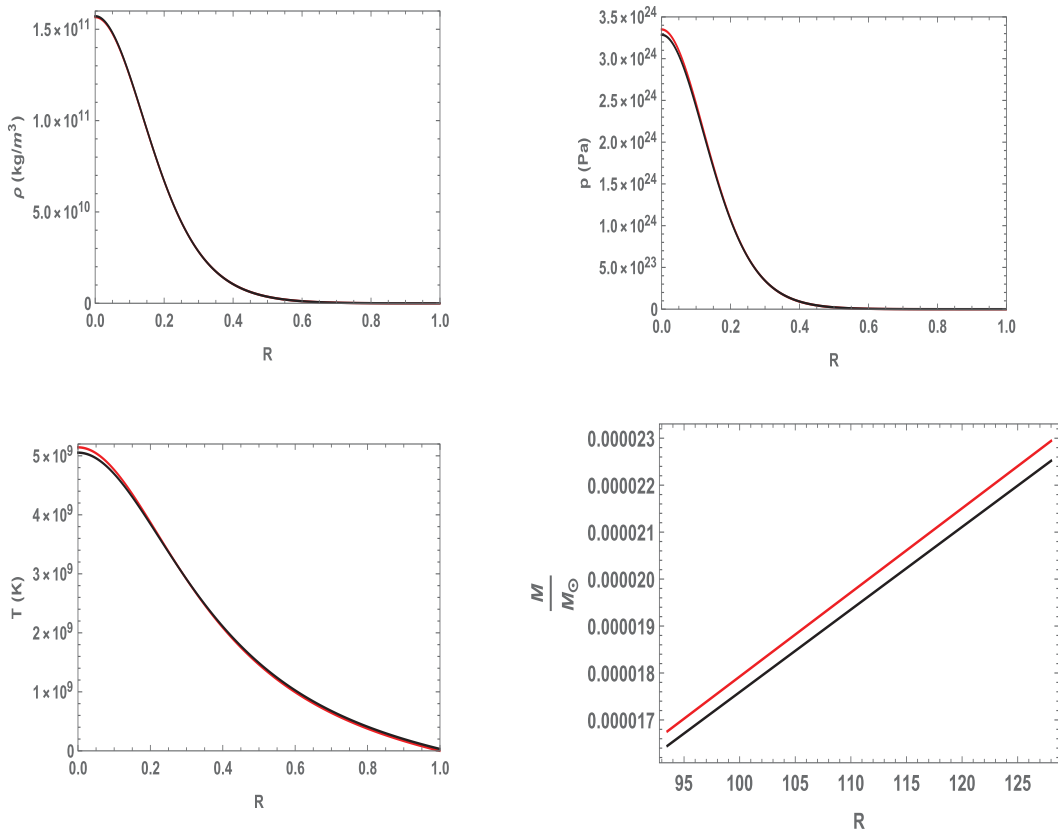
Portanto, a equação de Boltzmann (5.30) em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2}\right) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right] - \left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} - \frac{3\phi}{c^2}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big) + \frac{1}{c^2} \left\{ 3 \left(v_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + v_\theta \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + v_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial v_r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right. \\ & + 4 \left(v_r \frac{\partial f}{\partial v_r} + v_\varphi \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) \left(v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial v_r} \left[\frac{\partial \xi_r}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{r} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\varphi \xi_\varphi}{r} \right. \\ & \left. \left. v_z \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} \left[\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{v_r \xi_\varphi}{r} + v_z \left(\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial f}{\partial v_z} \left[\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + v_r \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial r} - \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \right) + \frac{v_\varphi}{r} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} = Q(f, f). \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

E SOLUÇÕES POITRÓPICAS: ANÃS BRANCAS

Neste apêndice é apresentada a análise para um estrela Anã Branca, como um exemplo. Esta análise é apresentada para mostrar que para outros tipos de estrelas que não as estrelas de Neutrôns, as contribuições pós-Newtonianas, não contribuem ou não são relevantes para as quantidades físicas analisadas. A estrela analisada aqui, é a Anã Branca Sírius B, que tem a massa estimada: $M = 1.05M_{\odot}$ e o raio mede aproximadamente $R = 0.008R_{\odot}$ [115]. As curvas para a densidade de massa, pressão, temperatura e relação massa-raio em função do raio R , nas teorias Newtoniana e pós-Newtoniana, para esta estrela estão representadas graficamente na figura E.1.

Figura E.1: Soluções politrópicas da estrela Anã Branca Sírius B. Newtoniana: curva em vermelho; pós-Newtoniana: curva em preto.



A partir da figura E.1 o comportamento das curvas para densidade de massa, pressão, temperatura e a relação massa-raio não apresentam contribuições pós-Newtonianas.

Este exemplo difere do caso das análises feitas para as estrelas de Neutrôns. Além disso, no caso da relação massa-raio as contribuições pós-Newtonianas são menores que a Newtoniana, neste caso.